Topológia

Szűcs András

Tartalomjegyzék

I Első félév 3

1 Bevezető 4
1.1 Néhány topológiai tétel elöljáróban 4
1.2 Topológiai alapfogalmak 7

2 Szétválaszthatósági axiómák 11
2.1 Szétválaszthatósági axiómák 11

3 Összefüggőség 15
3.1 Összefüggőség 15
3.2 Utak, útszerű összefüggőség 16

4 Megszámlálhatósági axiómák 18
4.1 Megszámlálhatósági axiómák 18

5 Kompaktság 20
5.1 Kompakt terek 20

6 Konstrukciók 24
6.1 Szorzatterek 24
6.2 Faktorterek 27

7 A fundamentális csoport 29
7.1 A fundamentális csoport definíciója 29
7.2 Egyszeresen összefüggő terek 32
7.3 Fedőterek 33
7.4 Szorzat fundamentális csoportja 35
7.5 Homotopikus ekvivalencia 36

8 Topologikus csoportok 37
8.1 Topologikus csoportok 37

II Második félév 39

9 A fundamentális csoport kiszámítása 40
9.1 Van Kampen tétele 40
9.2 Alkalmazások 42
9.3 Magasabb dimenziós homotopikus csoportok 43
9.4 Feladatok 44

10 Kis csomóelmélet **46**
10.1 Csomók és csoportjaik . . . 46
10.2 Tórikus csomók . . . 46
10.3 Fonatcsoportok . . . 47
10.4 Feladatok . . . 48

11 CW-komplexusok **50**
11.1 Véges cella-komplexusok . . . 50
11.2 Kanonikus felületek . . . 51
11.3 Feladatok . . . 52

12 Sokaságok **54**
12.1 Alapvető tulajdonságok . . . 54
12.2 1-dimenziós sokaságok osztályozása . . . 56
12.3 Feladatok . . . 57

13 Kétdimenziós sokaságok **58**
13.1 Kétdimenziós sokaságok osztályozása . . . 58
13.1.1 A felületek osztályozásának szemléletes bizonyítása (Fomenko nyomán) . . . 61
13.2 Magasabb dimenziós sokaságok osztályozása . . . 62
13.3 Heegaard felbontás . . . 63
13.4 Feladatok . . . 64

14 Differenciálható sokaságok **66**
14.1 Differenciálható (vagy sima) sokaságok . . . 66
14.2 Leképezések . . . 67
14.3 Folytonos függvény approximálása simával . . . 70
14.4 Feladatok . . . 71

15 Leképezések foka **72**
15.1 Leképezések foka . . . 72
15.2 Alkalmazások . . . 73
15.3 A Poincaré-Hopf tétel . . . 75
15.4 A Borsuk-Ulam tétel . . . 77
15.5 Feladatok . . . 78

16 Vizsgafeladatok a 2. félév után **79**

17 Jelölések **81**

I

Első félév

1. fejezet

Bevezető

1.1 Néhány topológiai tétel elöljáróban

Az ebben a fejezetben bemutatásra kerülő tételek logikailag inkább illenének ezen jegyzet későbbi lapjaira. Ezen témák előrehozásának az a célja, hogy felvillantsák a topológia kérdésfeltevéseit és néhány érdekes eredményét. Mindezzel azt szeretnénk megelőzni, hogy az olvasó a kezdeti nehézségektől megriadva még azelőtt hagyja abba a jegyzet olvasását, hogy bepillanthatna a topológia szépségeibe azt gondolván, hogy a topológia egészének természete olyan sok technikai nehézséget rejt, mint az alapfogalmak, a "topológia nyelvének" bevezetését tartalmazó szakaszok. Annak oka, hogy a logikus felépítést elkerülve lehetséges néhány tétel kimondása, az, hogy ezen állítások megfogalmazhatók és megoldhatók a többdimenziós valós analízis és geometria eszköztárával — amelynek ismeretét az olvasóról ezen fejezetben feltételezzük. Lássuk tehát, milyen kérdésekkel foglalkozik a topológia.

Meg lehet-e fésülni egy sündisznót? A valós probléma kísérleti megoldása helyett adjunk matematikai modellt problémánkra. Jelöljük S^2-vel a gömbfelületet, vagyis a következő halmazt:

$$S^2 = \{x \mid x \in \mathbb{R}^3,\ ||x|| = 1\}.$$

A gömbfelület minden pontjából induljon ki egy egységvektor — méghozzá követeljük meg, hogy minden ilyen vektor legyen a kezdőpontjában S^2-höz fektetett érintősíkban. Természetesnek tűnik megkövetelni, hogy gömbünk —a sündisznó — ne legyen nagyon kócos, vagyis az érintővektorok minden pontban folytonosak legyenek (*vektormező*). Világos, hogy még egyszerűbben is megfogalmazhatjuk a feladatot, a következőképpen: létezik-e egy v folytonos leképezés S^2-ből S^2-be, melyre igaz, hogy minden $x \in S^2$-re x merőleges $v(x)$-re.

Most, hogy megfogalmaztuk tisztán matematikailag a problémát, felvetődik a kérdés egy természetes általánosítása. Vajon meg lehet-e fésülni a tóruszt vagy a "kengyelfelületet"? (A tórusz és kengyelfelület leírását lásd **??**??.)

A válasz kérdéseinkre az, hogy a gömböt nem lehet megfésülni (ezt nemsokára be is bizonyítjuk), a tóruszt igen (az olvasó könnyen megkonstruálhat egy lehetséges fésülést), míg a kengyelfelületet nem. Ez utóbbi eredmény nem könnyű. Ehelyett térjünk rá a "sündisznó tétel" bizonyításához szükséges fogalmak bevezetésére.

1.1.1. definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$. Az A-n értelmezett *vektormezőnek* nevezünk egy $A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvényt.

Tekintsük az $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\}$ körvonalat, és ezen egy $v\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vektormezőt, amelyik sehol sem veszi fel a 0 értéket. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n = x_1$ pontok a körön olyan sűrűn, hogy az x_i és x_{i+1} által meghatározott (rövidebbik) ív bármely két pontjához rendelt vektorok szöge legyen kisebb $\pi/2$-nél.

1.1.2. definíció. A $v\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ vektormező *körülfordulási számának* mondjuk a következő kifejezés értékét:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1}(v(x_i), v(x_{i+1}))\angle}{2\pi}.$$

Az olvasóra bízzuk annak belátását, hogy ez a definíció független az x_i pontok választásától (számától), és hogy a körülfordulási szám értéke *egész* szám.

1.1.3. példa. A könnyebb megadás kedvéért képzeljük a kört a komplex számsík egységkörének. Ekkor a $v(z) = z$ és a $v(z) = iz$ vektormezők körülfordulási száma 1. A $v(z) = z^2$ vektormező körülfordulási száma 2, és általában a $v(z) = z^n$ vektormezőé pedig n. Az olvasónak ajánljuk ezen vektormezők felvázolását.

1.1.4. feladat. **(a)** Legyen két v_1 és $v_2: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ vektormező olyan, hogy tetszőleges $x \in S^1$-re $v_1(x)$ és $v_2(x)$ által bezárt szög legfeljebb $\pi/2$. Ekkor v_1 és v_2 körülfordulási száma megegyezik.
(b) Tekintsünk egy D^2-en értelmezett sehol sem nulla v vektormezőt. Lássuk be, hogy létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy az $S^1_\varepsilon = \{x \in D^2 \mid ||x|| = \varepsilon\}$-re megszorítva a v vektormező körülfordulási száma 0.

E két feladat felhasználásával könnyen bebizonyíthatjuk a következő lemmát.

1.1.5. lemma. *A D^2 körlemezen értelmezett sehol sem nulla vektormező a körlemez határára megszorítva 0 körülfordulási számú vektormezőt határoz meg.*

Bizonyítás. Legyen $k(r)$ $(0 < r \leq 1)$ az origó körüli r sugarú körre való megszorítás körülfordulási száma. (Nyilván tetszőleges sugarú körre értelmezhető a körülfordulási szám.) A $k(r): (0, 1] \longrightarrow \mathbb{Z}$ egészértékű, folytonos (ld. 1.1.4 feladat) függvény. Ezek szerint $k(r)$ konstans függvény, melynek értéke a 0-hoz elég közel 0 (ld. 1.1.4 feladat), így k az azonosan nulla függvény. Tehát $k(1) = 0$, amit bizonyítani kellett. □

A következő lemma bizonyítását az olvasóra bízzuk.

1.1.6. lemma. *Legyen a v_1 és $v_2: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ vektormezők körülfordulási száma 0, és legyen u egy olyan $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ vektormező, melyre $u(x)$ felezi $v_1(x)$ és $v_2(x)$ szögét minden $x \in S^1$-re. Ekkor u körülfordulási száma is 0.* □

A lemmából már könnyen megkapható a következő — ún. sündisznó-tétel — bizonyítása

1.1.7. tétel. (Sündisznó-tétel) *Az S^2 gömbfelületen nem létezik sehol sem nulla érintő vektormező.*

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy v ilyen vektormező. Vetítsük a „déli féltekét" az É „északi sarkból" az „egyenlítő" síkjára, vagyis $x \in S^2$-höz rendeljük az egyenlítő síkjának és az Éx szakasznak a metszéspontját; legyen ez a vetítés p. Vetítsük továbbá a déli félteke pontjaihoz rendelt vektorokat (mindegyiket az adott érintősíkba képzelve) szintén az egyenlítő síkjára a következő módon: Az $x \in S^2$ pontbeli $v(x)$ vektornak az a $p(v(x))$ vektor feleljen meg, mely $p(x)$-et köti össze az egyenlítő síkjának és az Éx szakasz $v(x)$ menti eltoltjának metszésével. Vegyük észre, hogy $p(v(x))$ nem lehet 0-vektor. Az északi féltekén is definiálunk egy q függvényt — ott a déli sarkból való hasonló vetítés által.

Tekintsük az egyenlítőt. Ott kaptunk két sehol sem 0 vektormezőt: $p(v(x)), q(v(x))$ $x \in S^1 =$ egyenlítő. Mindkettő körülfordulási száma 0, hiszen kiterjeszthetők az egyenlítő által határolt körlapra (ld. fenti lemma). Viszont minden $x \in S^1$-re szögüket felezi az S^1 érintővektora (definíció szerint). Viszont ennek körülfordulási száma ± 1, s nem nulla, amivel ellentmondásra jutottunk. □

1.1.8. tétel. (Az algebra alaptétele) *Minden $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ polinomnak van komplex gyöke.*

Bizonyítás. Legyen $q(z) = p(z) - z^n$ polinom. Mivel z^n magasabb fokú, mint q, így létezik egy nagy R szám, hogy az R-nél nagyobb(egyenlő) abszolút értékű komplex számokon $|z^n| > |q(z)|$ (például $R > \max\{1, \sum_{i=0}^{n-1} a_i\}$ megfelel). Legyen az R sugarú körön $v_1(z) = z^n$, $v_2(z) = p(z)$ két vektormező. Az első sehol sem 0, és a második is sehol sem 0, hiszen $|z^n| > |q(z)|$ teljesül.

1.1.9. feladat. Felhasználva, hogy $|z^n| > |q(z)|$, bizonyítsuk be, hogy $v_1(z)$ és $v_2(z)$ szöge minden $z \in S^1$-re kisebb, mint $\pi/2$.

Tehát v_1 és v_2 körülfordulási száma egyenlő. Mivel v_1 körülfordulási száma n, ezért v_2 körülfordulási száma is $n \neq 0$, tehát nem terjedhet ki $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid ||z|| \leq R\}$ körlapra sehol sem 0 vektormezőként. Vagyis ezen a körlapon van gyöke p-nek. $\square$

1.1.10. tétel. (Borsuk-Ulam tétel) *Minden $f\colon S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos függvényre létezik $x \in S^2$, hogy $f(x) = f(-x)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f olyan függvény, melyre $f(x) \neq f(-x)$ minden $x \in S^2$-re. Legyen ekkor

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{||f(x) - f(-x)||}.$$

Ez a $g\colon S^2 \longrightarrow S^1$ függvény tehát olyan, hogy $g(-x) = -g(x)$ (másszóval ekvivariáns). Azt fogjuk belátni, hogy ilyen g nem létezik. Az S^2 egy főkörére (egyenlítő) g-t megszorítva egy $v\colon S^1 \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$ vektormezőt kapunk.

1.1.11. feladat. (a) Lássuk be, hogy mivel g ekvivariáns, ezért ennek körülfordulási száma páratlan.
(b) Mutassuk meg, hogy a v vektormező kiterjeszthető az egyenlítő által határolt körlapra (g segítségével természetes módon), s így körülfordulási száma 0.

A két feladat adja a tétel bizonyítását. $\square$

1.1.12. tétel. (Brouwer fixpont tétele) *Minden $f\colon D^2 \longrightarrow D^2$ folytonos függvénynek van fixpontja, vagyis olyan $x \in D^2$, melyre $x = f(x)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik olyan $f\colon D^2 \longrightarrow D^2$, melynek nincsen fixpontja. Ekkor tekinthetjük a sehol sem 0 $v\colon D^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ vektormezőt, melyet $x \mapsto f(x) - x$ definiál. Ezt a D^2 peremére megszorítva tehát egy 0 körülfordulási számú v vektormezőt kaptunk. Másrészt viszont látható, hogy $v(x)$ és $-x$ hajlásszöge minden $x \in S^1$-re kisebb, mint $\pi/2$. Tehát körülfordulási számuk megegyezik, ami ellentmondás. $\square$

A továbbiakban (bizonítás nélkül) felsorolunk még néhány hasonló feladatot.

1. Meg lehet-e fésülni a 4-dimenziós sündisznót?
2. (Sonkásszendvics probléma.) Adott a síkon két s íkidom. Van-e olyan egyenes, mely mindkettő területét felezi?
3. (3-dimenziós sonkásszendvics probléma.) Adott a térben három test. Van-e olyan sík, mely mindhárom térfogatát felezi?
4. (n-dimenziós Borsuk-Ulam tétel.) Adott egy $f\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ függvény. Bizonyítsuk be, hogy létezik $x \in S^n$, melyre $f(x) = f(-x)$.
5. (n-dimenziós Brouwer fixpont tétel.) Bizonyítsuk be, hogy minden $f\colon D^n \longrightarrow D^n$ folytonos függvénynek van fixpontja.
6. (Borsuk) Mutassuk meg, hogy nem létezik $D^2 \longrightarrow S^1$ leképezés, mely a peremre megszorítva az identitás.
7. Létezik-e S^3-on sehol sem 0 érintő vektormező?
8. Létezik-e S^{2n+1}-en sehol sem 0 érintő vektormező?
9. Létezik-e S^{2n}-en sehol sem 0 érintő vektormező?
10. Létezik-e S^3-on kettő olyan érintő vektormező, melyek minden pontban lineárisan függetlenek?
11. Minden $f\colon S^2 \longrightarrow S^2$ folytonos függvényre létezik $x \in S^2$, hogy vagy $x = f(x)$ vagy $-x = f(x)$ teljesül.
12. Létezik-e S^2-n ,,érintő egyenesmező''?

1.2 Topológiai alapfogalmak

1.2.1. definíció. Az (X, Ω) párt *topológikus térnek* nevezzük, ha X tetszőleges halmaz, $\Omega \subset P(X)$, és igazak rájuk a következő axiómák:
(1) $\emptyset \in \Omega$, $X \in \Omega$,
(2) $U_\alpha \in \Omega$ $(\alpha \in A)$ esetén $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \Omega$ tetszőleges A indexhalmazra,
(3) $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \Omega$ esetén $\cap_{i=1}^{n} U_i \in \Omega$.

Gyakran X-et magát topológikus térnek mondjuk, melybe beleértjük, hogy X-en adott egy Ω „topológikus struktúra".

1.2.2. definíció. Az $U \subset X$ részhalmazt *nyíltnak* nevezzük, ha $U \in \Omega$. Az $B \subset X$ részhalmaz *zárt*, ha $X - B$ komplementere nyílt.

A zárt halmazok rendszeréről (melyet nevezzünk Ω'-nek) megállapíthatjuk a következőket:
(1') $\emptyset \in \Omega'$, $X \in \Omega'$,
(2') $B_\alpha \in \Omega' \Rightarrow \cap_\alpha B_\alpha \in \Omega'$ tetszőleges indexhalmazra,
(3') $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \Omega' \Rightarrow \cup_{i=1}^{n} B_i \in \Omega'$.
A nyílt halmazok rendszere tehát tetszőleges unióra, és véges metszetre „zárt", míg a zárt halmazok rendszere véges unióra és tetszőleges metszetre zárt. Nyilvánvaló, hogy a topologikus struktúrát megadhatjuk a zárt halmazok rendszerével.

1.2.3. példa. Legyen X tetszőleges halmaz és $\Omega = \{X, \emptyset\}$. Ezt a teret antidiszkrét topologikus térnek hívjuk. Legyen X tetszőleges halmaz és $\Omega = P(X)$. Ezt a teret diszkrét topologikus térnek hívjuk. Legyen X tetszőleges végtelen halmaz és álljon Ω' a véges halmazokból és az egész térből.

1.2.4. definíció. Az X halmazon bevezethető topologikus struktúrákon létezik egy természetes részbenrendezés: az Ω_1 topologikus struktúrát *finomabbnak* (vagy *erősebbnek, bővebbnek*) mondjuk az Ω_2-nél, ha $\Omega_2 \subset \Omega_1 \subset P(X)$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy Ω_2 *durvább* (vagy *gyengébb, szűkebb*), mint Ω_1.

Nyilván a diszkrét topológia a legerősebb és az antidiszkrét topológia a leggyengébb az adott halmazon adható topológiák között.

1.2.5. definíció. Legyen $x \in X$. Az x pont *környezetének* mondjuk az $U \subset X$ halmazt, ha létezik V nyílt halmaz, melyre $x \in V \subset U$. Legyen $A \subset X$. Az A *belső részén* értjük — és int A-val jelöljük — az A-ban fekvő nyílt halmazok unióját. Az $x \in A$ az A *belső pontja*, ha $x \in \text{int } A$.

Mivel nyílt halmazok uniója nyílt, így int A is nyílt, tehát nyilván int A az A-ban fekvő legbővebb nyílt halmaz. Könnyen belátható továbbá, hogy $x \in \text{int } A$ ekvivalens azzal, hogy létezik olyan U nyílt halmaz, melyre $x \in U \subset A$, vagyis, hogy A környezete x-nek.

1.2.6. definíció. Az $A \subset X$ részhalmaz *lezárása* az A-t tartalmazó zárt halmazok metszete. Jelölje ezt $\bar{A}$.

Mivel zárt halmazok metszete zárt, így $\bar{A}$ is zárt, vagyis $\bar{A}$-t definiálhatjuk az A-t tartalmazó legszűkebb zárt halmazként is.

1.2.7. állítás. *Az $x \in \bar{A}$ akkor és csakis akkor, ha x minden környezetének A-val vett metszete nem üres.*

Bizonyítás. Az állítást indirekt bizonyítjuk: legyen tehát $y \notin \bar{A}$. Ez ekvivalens azzal, hogy létezik egy F zárt halmaz, mely tartalmazza A-t, de nem tartalmazza y-t. Ez viszont ekvivalens azzal, hogy létezik egy U nyílt halmaz, mely tartalmazza y-t, de nem metszi A-t (tudniillik $X - F$). $\square$

1.2.8. definíció. Az $x \in X$ pont az $A \subset X$ halmaz *torlódási pontja*, ha x minden környezete tartalmazza A végtelen sok pontját. Az $x \in X$ pont az $A \subset X$ halmaz *határpontja*, ha x minden környezete metszi mind A-t, mind $X - A$-t. Az A halmaz *határa* legyen az A határpontjainak összessége; ezt a halmazt jelöljük ∂A-val. Az A halmaz *külső pontjainak* nevezzük azokat a pontokat, melyeknek létezik olyan környezete, mely nem metszi A-t. A külső pontok halmaza legyen ext A.

1.2.9. állítás. *Az* $\bar{A} \cap \overline{(X - A)}$ *halmaz megegyezik* A *határával, továbbá* $\partial A = \partial(X - A)$. $\square$

Könnyen igazolható, hogy ext $A =$ int $(X - A)$, $\bar{A} =$ int $A \cup \partial A$, valamint hogy az X topologikus tér felbomlik az $X =$ int $A \cup \partial A \cup$ ext A *diszjunkt* unióra.

Legyen adott egy X topologikus tér, és definiáljuk az $f\colon P(X) \longrightarrow P(X)$ függvényt az $A \mapsto \bar{A}$ operáció segítségével. Erre a függvényre igazak a következő tulajdonságok:
(I) $f(\emptyset) = \emptyset$,
(II) $A \subset f(A)$,
(III) $f(f(A)) = f(A)$,
(IV) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Ez az állítás fordítva is igaz, vagyis

1.2.10. tétel. *Ha adott egy* X *halmaz és egy* $f\colon P(X) \longrightarrow P(X)$ *függvény a fenti (I)–(IV) tulajdonságokkal, akkor létezik egyértelműen egy topológia* X*-en melyre nézve* $f(A) = \bar{A}$.

Bizonyítás. Először a létezést bizonyítjuk. Legyen $\Omega' = \{A \in P(X) \mid A = f(A)\}$ a zárt halmazok halmaza. Ellenőrizzük a zárt halmazokra kirótt feltételeket. Az $\emptyset \in \Omega'$ (I) szerint teljesül, és az $X \in \Omega'$ is teljesül, hiszen $X \subset f(X) \subset X$ igaz (II) szerint. A (IV) tulajdonságból könnyen levezethető az ún. monotonitás: ha $A \subset B$, akkor $f(A) \subset f(B)$. Legyenek most A_α-k olyanok, hogy $f(A_\alpha) = A_\alpha$. Tetszőleges α_0-ra nyilván $\cap_\alpha A_\alpha \subset A_{\alpha_0}$. Ebből a monotonitás miatt $f(\cap_\alpha A_\alpha) \subset A_{\alpha_0} = f(A_{\alpha_0})$. Vagyis $\cap_\alpha A_\alpha \subset f(\cap_\alpha A_\alpha) \subset \cap_{\alpha_0} A_{\alpha_0}$. Így az $f(\cap_\alpha A_\alpha) = \cap_\alpha A_\alpha$ állítást beláttuk. Már csak az van hátra, hogy belássuk, hogy Ω' véges unióra zárt. Ezt elég két halmaz uniójára belátni (s a többire indukcióval következtetni). Legyen tehát $f(A) = A$ és $f(B) = B$. Ekkor $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) = A \cup B$. Ezzel az axiómákat ellenőriztük.

1.2.11. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az Ω' által definiált topológiában f megegyezik a lezárás-operációval.

Be kell még látni a topológia unicitását. Ez nyilvánvaló, hiszen ha f a lezárás-operáció valamely topológiára nézve, akkor a fenti Ω'-beli elemeknek zártaknak kell lenni, és minden zártra igaznak kell lennie, hogy az ő f-képe önmaga. Ezzel a tétel állítását beláttuk. $\square$

1.2.12. definíció. Egy $\Sigma \subset \Omega$ halmazrendszer az (X, Ω) tér *bázisa*, ha minden nyílt halmaz előáll Σ-beliek (tetszőleges számosságú) uniójaként.

1.2.13. tétel. *Legyen* X *egy halmaz. A* $\Sigma \subset P(X)$ *halmazrendszer pontosan akkor lehet egy* X*-en értelmezett topológia bázisa, ha* Σ*-beli halmazok tetszőleges véges metszete előáll* Σ*-beli halmazok uniójaként, valamint* X *előáll* Σ*-beliek uniójaként.*

Bizonyítás. Ha Σ egy topológia bázisa, akkor Σ-beliek véges metszete nyílt, így az előáll Σ-beliek uniójaként. A fordított irányhoz definiáljuk az

$$\Omega = \{U \mid U = \cup_\alpha U_\alpha \ \text{ ahol } \ U_\alpha \in \Sigma\}$$

halmazt. Az axiómáink segítségével ellenőrizhető, hogy ez a halmaz lehet egy X-en értelmezett topológia nyílt halmazainak rendszere lehet. Ennek a belátását az olvasóra bízzuk. $\square$

1.2.14. példa. Legyen $(X, <)$ egy rendezett halmaz (például egy számosság). Álljon Σ a nyílt intervallumokból és a nyílt félegyenesekből. Az így definiált topológiát *rendezéstopológiának* hívjuk.

1.2.15. definíció. Legyen (X, Ω) topologikus tér. A $\Sigma' \subset \Omega$ halmazrendszer *előbázis*, ha Σ'-beli halmazokból képezett véges metszetek bázist alkotnak.

1.2.16. feladat. Legyen X egy halmaz. Tetszőleges $\Sigma' \subset P(X)$ halmazrendszerhez, melyre $\cup_{U \in \Sigma'} U = X$ teljesül, létezik olyan topológia, melyre Σ' a topológia előbázisa.

Legyen most (X,ρ) egy metrikus tér. A $D(a,r)=\{x\in X \mid \rho(a,x)<r\}$ halmazt az a középpontú, r sugarú (nyílt) golyónak, míg az $S(a,r)=\{x\in X \mid \rho(a,x)=r\}$ halmazt az a középpontú, r sugarú gömb(felület)nek nevezzük.

1.2.17. tétel. *X-en a nyílt golyók egy topológia bázisát alkotják.*

Bizonyítás. Azt kell ellenőriznünk, hogy golyók véges metszete előáll golyók uniójaként. Tekintsük a $D(a_i,r_i)$ golyók metszetét. Legyen ennek egy pontja x. Definíció szerint $\rho(a_i,x)<r_i$. Ekkor léteznek olyan ε_i pozitív számok, melyekre $\rho(a_i,x)<r_i-\varepsilon_i$ teljesül. Legyen $\varepsilon(x)<\varepsilon_i$ minden i-re (mivel véges sok gömb metszetéről van szó, választható pozitív $\varepsilon(x)$). Könnyen belátható — a ρ-ra teljesülő háromszög-egyenlőtlenségből —, hogy $D(x,\varepsilon(x))\subset D(a_i,r_i)$ minden i-re. Az összes $x\in\cap_i D(a_i,r_i)$-re így definiált $D(x,\varepsilon(x))$ golyók uniója tehát éppen $\cap_i D(a_i,r_i)$. $\square$

1.2.18. definíció. Az (X,ρ) metrikus tér nyílt golyói (mint bázis) által meghatározott topológia nyílt halmazait jelöljük Ω_ρ-val. Az (X,Ω) topologikus tér *metrizálható*, ha létezik olyan ρ metrika X-en, melyre $\Omega_\rho=\Omega$.

1.2.19. feladat. Mutassunk nem metrizálható topologikus teret.

1.2.20. példa. $\mathbb{R}^n$-en a szokásos euklideszi metrika által definiált topológiát *euklideszi topológiának* nevezzük.

Térjünk vissza általános topologikus terekre. Legyen $A\subset X$, és $\Omega_A=\{V\subset A \mid V=A\cap U$ valamely $U\in\Omega$ -ra $\}$. Könnyen belátható, hogy (A,Ω_A) egy topologikus tér. Ezt a teret X *alterének* nevezzük. Ha most egy A-beli halmaz lezárásáról beszélünk, akkor ezt érthetjük A-ban és X-ben is, hiszen mindkettő topologikus tér. Ezeket megkülönböztetendő, felső indexbe odaírjuk, hogy melyik térben zárjuk le a halmazt.

1.2.21. feladat. **(a)** Lássuk be, hogy egy $B\subset A$ halmazra $\bar{B}^X\cap A=\bar{B}^A$.
(b) Igazoljuk, hogy nyílt altér nyílt részhalmaza nyílt, és hogy zárt altér zárt részhalmaza zárt.

1.2.22. példa. Ha $A\subset\mathbb{R}^n$, akkor azon tekinthetjük az $\mathbb{R}^n$ euklideszi topológiájának altér-topológiáját. Ezentúl, ha egy ilyen halmazról nem mondjuk meg, milyen topológiát értünk rajta, mindig az $\mathbb{R}^n$ altér-topológiáját értjük.

Az altér-konstrukción kívül még egy egyszerű konstrukciót mutatunk topológikus terekre. Az (X,Ω) és az (Y,τ) terek *diszjunkt uniója* az a topologikus tér, melynek alaphalmaza X és Y diszjunkt uniója, a nyílt halmazok rendszere pedig $\{U\cup V \mid U\in\Omega, V\in\tau\}$. (Annak ellenőrzése, hogy ez valóban jó definíció, nyilvánvaló.)

1.2.23. definíció. Legyenek (X,Ω) és (Y,τ) topologikus terek. Egy $f\colon X\longrightarrow Y$ leképezésről azt mondjuk, hogy *folytonos*, ha minden (Y-beli) nyílt halmaz őse (X-ben) nyílt.

1.2.24. példa. Minden $f\colon X\longrightarrow Y$ függvény folytonos, ha vagy X diszkrét, vagy Y antidiszkrét topológikus tér. Az $\mathrm{id}_X\colon(X,\Omega_1)\longrightarrow(X,\Omega_2)$ függvény pontosan akkor folytonos, ha Ω_1 bővebb topológia, mint Ω_2.

1.2.25. állítás. *A folytonosság ekvivalens definíciójához jutunk, ha a következők valamelyikét követeljük meg:*
(1) létezik egy bázis Y-ban, melynek minden elemének ősképe nyílt;
(2) létezik egy előbázis Y-ban, melynek minden elemének ősképe nyílt;
(3) minden Y-beli zárt halmaz őse zárt.

Bizonyítás. Mindhárom állítás könnyen következik az alábbi nyilvánvaló halmazelméleti azonosságok felhasználásával:

$$f^{-1}(\cup A_\alpha)=\cup f^{-1}(A_\alpha),\quad f^{-1}(\cap A_\alpha)=\cap f^{-1}(A_\alpha),\quad f^{-1}(Y-A)=X-f^{-1}(A).$$

$\square$

1.2.26. állítás. *Az $f\colon X\longrightarrow Y$ függvény akkor és csak akkor folytonos, ha minden $A\subset X$-re $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$.*

Bizonyítás. Ha f folytonos, akkor azt kell tehát belátnunk, hogy $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Ehhez elég azt belátni, hogy $\bar{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Ebben a kifejezésben a jobboldal nyilván tartalmazza A-t és zárt (hiszen egy zárt halmaz ősképe). Tehát definíció szerint tartalmazza a baloldalt.

A másik irány bizonyításához azt kell belátnunk, hogy egy Z zárt halmaz ősképe is zárt. Legyen $f^{-1}(Z) = A$. Ekkor tudjuk, hogy $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} = Z$, tehát $\bar{A} \subset f^{-1}(Z) = A$. Ebből pedig következik, hogy A zárt. □

Vegyük észre, hogy a folytonosság definíciójából könnyen következik, hogy folytonos függvények kompozíciója is folytonos. Hiszen ha $f: X \longrightarrow Y$ és $g: Y \longrightarrow Z$ folytonos, akkor egy Z-beli A nyílt halmaz ősképe $g \circ f$-nél megegyezik $f^{-1}(g^{-1}(A))$-val, vagyis valóban nyílt (felhasználva, hogy f és g folytonos).

1.2.27. definíció. Egy $f: X \longrightarrow Y$ függvény az $x \in X$ *pontban folytonos*, ha $f(x)$ minden V környezetéhez található x egy olyan U környezete, hogy $f(U) \subset V$.

1.2.28. feladat. Egy függvény pontosan akkor folytonos, ha minden pontban folytonos.

1.2.29. megjegyzés. A folytonosság definíciója összhangban áll az analízis folytonosság-definíciójával, ha az $\mathbb{R}^n$-en (vagy annak alterein) az euklideszi topológiát tekintjük.

1.2.30. definíció. Egy $f: X \longrightarrow Y$ leképezés *injekció*, ha minden Y-beli pontnak legfeljebb egy ősképe van, *szürjekció* (ráképezés), ha minden Y-beli pontnak van ősképe, *bijekció* (kölcsönösen egyértelmű), ha minden Y-beli pontnak pontosan egy ősképe van X-ben (vagyis pontosan akkor, ha injekció és szürjekció). Egy bijekciónak tehát van *inverzfüggvénye* (inverze), melyet f^{-1}-gyel jelölünk.

Ha f egy folytonos bijekció és f^{-1} is folytonos, akkor f-et *homeomorfizmusnak* nevezzük. Az X és Y tér *homeomorf*, ha létezik $f: X \longrightarrow Y$ homeomorfizmus.

1.2.31. megjegyzés. A homeomorfizmus definíciójában az f^{-1} folytonosságának feltétele lényeges, ez nem következik abból, hogy f folytonos bijekció. Tekintsük ugyanis az $f: [0, 2\pi) \longrightarrow S^1$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ függvényt. (Az értelmezési tartományt és az értékkészletet, mint a számegyenes ill. a sík alterét tekintjük, melyeken adott a metrikus topológia.) Mutassuk meg, hogy ez az f függvény folytonos bijekció, de inverze nem folytonos.

1.2.32. állítás. *Homeomorfizmusok kompozíciója is homeomorfizmus. Ha X homeomorf Y-nal, akkor Y is homeomorf X-szel. Minden tér homeomorf önmagával.* □

1.2.33. definíció. Ha X egy topologikus tér, akkor egy $a: \mathbb{N} \longrightarrow X$ leképezést *sorozatnak* nevezünk. Az $n \in \mathbb{N}$ szám képét jelöljük a_n-nel, magát a sorozatot pedig (a_n)-nel.

Az (a_n) X-beli sorozat az $x_0 \in X$ ponthoz *konvergál* ($\lim a_n = x_0$ vagy $a_n \longrightarrow x_0$), ha x_0 minden U környezetére létezik olyan n_0 küszöbindex, hogy $n \geq n_0$ esetén $a_n \in U$. Ilyenkor x_0 a sorozat (egyik) *határértéke*. Ha egy sorozat konvergál, akkor *konvergens*, ha nem, akkor *divergens*.

1.2.34. példa. Tekintsük az $(\frac{1}{n})$ sorozatot a számegyenesen. Ez konvergens, egyetlen határértéke van, a 0. Tekintsük ugyanezt a sorozatot a $(0, 1]$ intervallumon. Itt ez a sorozat divergens. Tekintsük az (n) sorozatot a számegyenesen, melyen a topológia legyen a 1.2.3 példában szereplő topológia. Itt ez a sorozat konvergens és minden $x \in \mathbb{R}$ pont a határértéke.

2. fejezet

Szétválaszthatósági axiómák

2.1 Szétválaszthatósági axiómák

2.1.1. definíció. Az X topologikus tér *T_1-tér*, ha minden $a, b \in X$-re létezik olyan U_{ab} környezete a-nak, mely nem tartalmazza b-t. Ekvivalens definícióhoz jutunk, ha azt követeljük meg, hogy X-ben az egypontú halmazok zártak legyenek.

Az X topologikus tér *Hausdorff-tér* vagy *T_2-tér*, ha minden $a, b \in X$-nek létezik U_a és U_b környezete úgy, hogy $U_a \cap U_b = \emptyset$.

2.1.2. példa. Az antidiszkrét topologikus tér és a 1.2.3 példában szereplő tér nem Hausdorff-tér.

2.1.3. állítás. *Hausdorff-térben egy sorozatnak legfeljebb egy határértéke van.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy sorozatnak a és b is határértéke. Ekkor léteznek olyan U_a és U_b környezeteik, melyek metszete üres. Mivel mindkettő határértéke a sorozatnak, így léteznie kell n_{a_0} és n_{b_0} küszöbindexeknek, hogy ha n nagyobb mindkettőnél, akkor a sorozat n-edik eleme U_a-ban és U_b-ben is benne van, ez pedig ellentmondás. $\square$

2.1.4. definíció. Az X topologikus teret *regulárisnak* nevezzük, ha minden $a \in X$-re és minden olyan $B \subset X$ zárt halmazra, melyre $a \notin B$, léteznek U_a és U_B környezetei a-nak és B-nek melyek diszjunktak. Az X topologikus tér *T_3-tér*, ha T_1-tér és reguláris. Az X topologikus tér *normális*, ha bármely két $A, B \subset X$ zárt, diszjunkt halmaznak létezik U_A és U_B környezete, melyek diszjunktak. Az X topologikus tér *T_4-tér*, ha T_1-tér és normális.

2.1.5. állítás. *A normális tér ekvivalens definíciójához jutunk, ha azt követeljük meg, hogy tetszőleges $A \subset W \subset X$ halmazokra — ahol A zárt, W nyílt — létezzen egy U nyílt halmaz, melyre $A \subset U \subset \bar{U} \subset W$.*

Bizonyítás. A $W \leftrightarrow X - B$ megfeleltetést használva a két definíció ekvivalenciáját könnyű igazolni. (Gyakran ez utóbbi (definiáló) tulajdonságot használjuk.) $\square$

2.1.6. feladatok. **(a)** Mutassunk példát arra, hogy egy tér reguláris, de nem T_1-tér.
(b) Mutassunk példát arra, hogy egy tér normális, de nem T_1-tér.

2.1.7. állítás. *Ha egy topologikus tér T_i-tér, akkor T_{i-1}-tér is ($i = 2, 3, 4$), vagyis $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$.* $\square$

2.1.8. lemma. (Uriszon) *Ha X normális tér és A, B diszjunkt zárt halmazok, akkor létezik olyan $f\colon X \longrightarrow [0,1]$ folytonos függvény, hogy $f|_A = 0$ és $f|_B = 1$.*

Bizonyítás. Legyen $F_0 := U_A$ nyílt halmaz, ahol $A \subset U_A \subset \overline{U_A} \subset X - B$ és legyen $F_1 = X - B$. Definiálni fogunk minden r $(0,1]$-beli diadikus törthöz ($\frac{p}{2^k}$ alakú számhoz) egy $F_r \subset X$ nyílt halmazt úgy, hogy ha $r < s$, akkor $\overline{F_r} \subset F_s$ teljesül. Felsoroljuk a diadikus törteket a következőképpen: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \ldots$, s ezekhez sorra definiáljuk F_r-et így (használva, hogy X normális tér):

$$\overline{F_0} \subset F_{\frac{1}{2}} \subset \overline{F_{\frac{1}{2}}} \subset F_1,$$

$$\overline{F_0} \subset F_{\frac{1}{4}} \subset \overline{F_{\frac{1}{4}}} \subset F_{\frac{1}{2}},$$

$$\overline{F_{\frac{1}{2}}} \subset F_{\frac{3}{4}} \subset \overline{F_{\frac{3}{4}}} \subset F_1,$$

$$\overline{F_0} \subset F_{\frac{1}{8}} \subset \overline{F_{\frac{1}{8}}} \subset F_{\frac{1}{4}},$$

$$\vdots$$

Definiálhatjuk f-et az $f(x) := inf\{r \mid x \in F_r\}$ képlettel, illetve konstans 1-nek, ha $x \notin F_r$ egyetlen r-re sem.

Erre az f függvényre nyilván teljesül, hogy $f|_A = 0$ és $f|_B = 1$. Most már csak azt kell belátnunk, hogy f folytonos. Ezt úgy tesszük, hogy bebizonyítjuk $f^{-1}((-\infty, s))$-ről, hogy nyílt és $f^{-1}((-\infty, s])$-ről, hogy zárt. (Feladat: miért elég ezt bizonyítani?)

Azt állítjuk, hogy $f^{-1}((-\infty, s)) = \cup_{r<s} F_r$. Ezt bizonyítja a következő gondolatmenet:

$$x \in f^{-1}((-\infty, s)) \Leftrightarrow f(x) < s \Leftrightarrow inf\{r \mid x \in F_r\} < s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists r_0 < s \; x \in F_{r_0} \Leftrightarrow x \in \cup_{r<s} F_r.$$

Másrészt azt állítjuk, hogy $f^{-1}((-\infty, s]) = \cap_{r>s} \bar{F}_r$. Ehhez vegyük észre, hogy az előzőekhez hasonlóan:

$$x \notin f^{-1}((-\infty, s]) \Leftrightarrow f(x) > s \Leftrightarrow inf\{r \mid x \in F_r\} > s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists r_0 > s \; x \notin F_{r_0} \Leftrightarrow x \notin \cap_{r>s} F_r.$$

Azt kell tehát még belátnunk, hogy $\cap_{r>s} F_r = \cap_{r>s} \bar{F}_r$. Ebből az egyik irányú tartalmazás világos, míg a másik irányhoz vegyük észre, hogy minden $\varepsilon > 0$ diadikus számra $\bar{F}_r \subset F_{r+\varepsilon}$, s így $\cap_{r>s} \bar{F}_r \subset \cap_{r>s} F_{r+\varepsilon}$. Mivel ez minden ε-ra igaz, így:

$$\cap_{r>s} \bar{F}_r \subset \cap_{\varepsilon>0} \cap_{r>s} F_{r+\varepsilon} = \cap_{r>s} F_r.$$

Vagyis valóban beláttuk, hogy $f^{-1}((-\infty, s]) = \cap_{r>s} \bar{F}_r$. Bebizonyítottuk tehát, hogy $f^{-1}((-\infty, s))$ nyílt, hiszen nyílt halmazok uniójaként áll elő, és hogy $f^{-1}((-\infty, s])$ zárt, hiszen zárt halmazok metszete. Ezzel a tétel állítását beláttuk. $\square$

2.1.9. megjegyzés. Természetesen az Uriszon-lemmában a $[0,1]$ intervallumot kicserélhetjük egy tetszőleges $[a,b]$ intervallumra, a feltételek és az állítás értelemszerű módosításával.

2.1.10. tétel. (Tietze) *Legyen adva egy X normális tér egy zárt A részhalmazán egy $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f kiterjeszthető X-re, vagyis létezik olyan $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $F|_A = f$.*

A bizonyítás előtt kimondunk még egy lemmát.

2.1.11. lemma. *Legyen adva egy X normális tér egy zárt A részhalmazán egy $f: A \longrightarrow [-c, c]$ folytonos függvény. Ekkor létezik olyan $g: X \longrightarrow [-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c]$ folytonos függvény, melyre $|f(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}c$ teljesül minden $a \in A$-ra.*

Bizonyítás. Legyen $A_- = \{a \in A \mid f(a) \leq -\frac{1}{3}c\}$ és $A_+ = \{a \in A \mid f(a) \geq \frac{1}{3}c\}$. Ezek zárt részhalmazai A-nak, és így X-nek is. Az Uriszon-lemma miatt létezik $g: X \longrightarrow [-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c]$ folytonos függvény, melyre $g|_{A_\pm} = \pm\frac{1}{3}c$. Ez a g függvény megfelel a lemma kívánalmainak (feladat: ellenőrizzük !). □

Bizonyítás (2.1.10 tételé). Először tegyük fel, hogy f korlátos, vagyis $|f| \leq c$. (Ez utóbbi felíráson azt értjük, hogy minden szóbajöhető x-re $|f(x)| \leq c$.) A fenti lemmát alkalmazva azt kapjuk, hogy létezik olyan

$$g: X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ melyre } |g| \leq \frac{1}{3}c \text{ és } |f - g| \leq \frac{2}{3}c.$$

Legyen most $f_1 = f - g: A \longrightarrow \mathbb{R}$. Ekkor ismét a lemmát alkalmazva létezik olyan

$$g_1: X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ melyre } |g_1| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}c \text{ és } |f_1 - g_1| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}c.$$

Ugyanígy folytatjuk. Legyen $f_n = f_{n-1} - g_{n-1}$. Ekkor létezik olyan

$$g_n: X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ melyre } |g_n| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n c \text{ és } |f_n - g_n| \leq \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n c.$$

Az $f = f_0$ és $g = g_0$ jelöléseket használva igaz, hogy $f_n = f - \sum_{i=0}^{n-1} g_i$. Legyen $F = \sum_{i=0}^{\infty} g_i$. Ezen a kifejezésen természetesen az analízisben megszokott $x \mapsto \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n} g_i(x)$ függvényt értjük. Ehhez persze be kell látnunk, hogy ez a határérték minden x-re létezik. Ez következik abból, hogy $|g_i(x)|$-re felső becslés $\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n c$. Ráadásul a $\sum g_i$ függvénysor egyenletesen konvergens, s így F is folytonos. A most használt érvek pontos megfogalmazását és bizonyítását az olvasóra bízzuk, hiszen ezek szinte szó szerint megegyeznek a valós analízis hasonló fogalmaival és bizonyításaival. Amit tehát még be kell látnunk az az, hogy $F|_A = f$. Ez is nyilvánvalóan adódik a fenti becsléseinkből, hiszen

$$|f - \sum_{i=0}^{n} g_i| = |f_n| \leq (\frac{2}{3})^n c \longrightarrow 0.$$

Ezzel az állítást bizonyítottuk arra az esetre, ha f korlátos.

Legyen most f nem korlátos függvény. Rögzítsünk egy $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ homeomorfizmust (például $\frac{2}{\pi}$arctg). Legyen $f^* = \phi \circ f$ kompozíció. Erre az f^* korlátos függvényre alkalmazhatjuk a bizonyítás első részét, s kapjuk, hogy létezik egy olyan $F^*: X \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, amire $F^*|_A = f^*$. (Feladat: miért nem fejezhető be a bizonyítás így: „$F = \phi^{-1} \circ F^*$ megfelel a tétel feltételeinek."?)

Legyen $B = \{x \in X \mid |F^*(x)| \geq 1\}$. Ez zárt halmaz és nyilván diszjunkt A-tól. Az Uriszon-lemma miatt tehát létezik egy $h: X \longrightarrow [0, 1]$ függvény, melyre $h|_A = 1$ és $h|_B = 0$. Az $F' = hF^*$ függvényre nyilván igaz, hogy $|F'| < 1$. Az $F = \phi^{-1} \circ F'$ leképezés megfelel a tétel feltételeinek. □

2.1.12. megjegyzés. A Tietze-tétel feltételei közt szereplő zártsági feltétel szükséges. Például a tg: $(0, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény nem terjeszthető ki $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvénnyé.

2.1.13. megjegyzés. A tétel bizonyításából kiolvasható, hogy az F leképezésről az is kiköthető, hogy $\sup f = \sup F$ és $inf f = inf F$ teljesüljön.

Térjünk át metrikus terek vizsgálatára.

2.1.14. állítás. *Minden metrikus tér Hausdorff-tér.*

Bizonyítás. Legyen az a és b pontok távolsága r. Ekkor a $D(a, r/2)$ és $D(b, r/2)$ nyílt halmazok szétválasztják őket. □

2.1.15. feladat. Mutassunk topologikus teret, mely nem metrizálható (nem homeomorf egy metrikus térrel).

2.1.16. definíció. Egy (X, ρ) metrikus térben egy x pont és egy A halmaz távolságán a $\rho(x, A) = inf_{a \in A}\, \rho(x, a)$ számot értjük.

2.1.17. állítás. $\rho(x, A) = 0$ *pontosan akkor, ha* $x \in \bar{A}$.

Bizonyítás. Mindkét oldal ekvivalens azzal, hogy x minden környezete metszi A-t. $\square$

2.1.18. állítás. *Az* X *metrikus térben rögzítsük az* A *részhalmazt. Az* $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \rho(x, A)$ *függvény folytonos.*

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)$ minden x, y-ra. Legyen $a \in A$. A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\rho(a, x) - \rho(x, y) \leq \rho(a, y) \leq \rho(a, x) + \rho(x, y).$$

E kettőből következik, hogy

$$inf_{a \in A} \rho(a, x) - \rho(x, y) \leq inf_{a \in A} \rho(a, y) \leq inf_{a \in A} \rho(a, x) + \rho(x, y).$$

Vagyis $f(x) - \rho(x, y) \leq f(y) \leq f(x) + \rho(x, y)$, tehát $|f(y) - f(x)| \leq \rho(x, y)$. $\square$

2.1.19. tétel. *Minden metrikus tér* T_4*-tér.*

Bizonyítás. Legyenek A és B halmazok zártak az (X, ρ) metrikus térben, és legyenek f és g a következő $X \longrightarrow \mathbb{R}$ függvények:

$$f\colon x \mapsto \rho(x, A),$$
$$g\colon x \mapsto \rho(x, B).$$

Mivel A zárt halmaz, így $f|_A = 0$ és $f(b) > 0$ minden $b \in B$-re. Ugyanígy $g|_B = 0$ és $f(a) > 0$ minden $a \in A$-ra. A következő halmazok

$$U_A = \{x \in X \mid f(x) - g(x) < 0\},$$
$$U_B = \{x \in X \mid f(x) - g(x) > 0\}$$

diszjunkt nyílt halmazok (nyílt halmazok ősképei a folytonos $f - g$ függvénynél), és tartalmazzák A-t illetve B-t. $\square$

3. fejezet

Összefüggőség

3.1 Összefüggőség

3.1.1. definíció. Az X topologikus tér *összefüggő*, ha részhalmazai közül csak X-re és az üreshalmazra teljesül, hogy mind zárt, mind nyílt. Egy topologikus tér részhalmaza összefüggő, ha az altér topológiában összefüggő.

3.1.2. állítás. *Az összefüggőség ekvivalens definíciója a következő: X összefüggő, ha az $X = U \cup V$ diszjunkt, nyílt halmazokra való felbontásban vagy U vagy V üres.* □

A következő állítás a Bolzano-tétel általánosítása.

3.1.3. állítás. *Ha egy X tér összefüggő, akkor minden $f(X)$ folytonos képe is összefüggő.*

Bizonyítás. Az $f(X)$ egy nyílt-zárt részhalmazának ősképe is nyílt-zárt. □

3.1.4. definíció. Az X topologikus tér egy A részhalmaza *sűrű*, ha $\bar{A} = X$.

3.1.5. állítás. *Ha A egy összefüggő részhalmaza X-nek, akkor $\bar{A}$ is összefüggő. Sőt, minden $A \subset B \subset \bar{A}$ részhalmaz is összefüggő.*

Bizonyítás. Elég azt bizonyítani, hogy ha $A \subset X$ összefüggő halmaz sűrű X-ben, akkor X is összefüggő. (Feladat: miért elég ezt bizonyítani?) Tegyük fel, hogy $X = U \cup V$, ahol U és V diszjunkt nyílt halmazok. Ekkor az

$$A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$$

az A-nak felbontása diszjunkt nyílt halmazokra. Tehát például $A \cap U = \emptyset$. Ez viszont vagy azt jelenti, hogy U üres, vagy azt, hogy A nem sűrű X-ben. □

3.1.6. állítás. *Közös ponttal bíró összefüggő halmazok egyesítése is összefüggő. Sőt, ha néhány összefüggő halmazról igaz, hogy a páronkénti metszeteik nem üresek, akkor egyesítésük is összefüggő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamilyen indexhalmazra $A_\alpha \subset X$ összefüggő, és páronkénti metszeteik nem üresek. Legyen ezek A egyesítésének egy felbontása diszjunkt (A-beli) nyílt halmazokra való felbontása $U \cup V$. Minden α-ra igaz, hogy vagy $A_\alpha \subset U$ vagy $A_\alpha \subset V$. Hiszen ha nem így lenne, akkor $(A_\alpha \cap U) \cup (A_\alpha \cap V)$ egy meg nem engedett felbontása lenne A_α-nak (ti. nem-üres diszjunkt nyílt halmazokra való felbontás lenne). Mivel bármely két A_α-nak van közös pontja, így az összes A_α-nak ugyanahhoz kell tartoznia, vagy U-hoz, vagy V-hez. Tehát a másik üreshalmaz. □

3.1.7. állítás. *A valós számegyenes összefüggő részhalmazai az intervallumok (beleértve az egypontú intervallumot is).*

Bizonyítás. Csak az intervallumok lehetnek összefüggők. Valóban, hiszen ha egy A részhalmaz nem intervallum, akkor létezik olyan c szám, mely nem eleme a halmaznak, de nála nagyobb és kisebb számok is elemei a halmaznak. Ekkor az $(A \cap (-\infty, c)) \cup (A \cap (c, +\infty))$ egy meg nem engedett felbontás lenne A-ra.

Másrészt elég megmutatni, hogy az egységintervallum összefüggő (akár zárt, akár nyílt, akár félig zárt, félig nyílt). Tegyük fel tehát, hogy $U \cup V$ egy felbontása $[0,1]$-nek. Legyen $0 \in U$ és legyen $a = infV$. Mivel U nyílt, így $a > 0$. Ha $a \in U$ lenne, akkor U nyíltsága miatt $a < \infty V$ lenne. Viszont $a \in V$ sem lehet, mert nyílt halmaz nem tartalmazhatja az infimumát. □

3.1.8. következmény. *$\mathbb{R}^n$ összefüggő. Ha $K \subset \mathbb{R}^n$ csillagszerű, akkor összefüggő.* □

3.1.9. állítás. *Tetszőleges $a \in X$-hez létezik egy legbővebb a-t tartalmazó összefüggő halmaz X-ben.*

Bizonyítás. Az

$$\cup\{A \subset X \mid a \in A \text{ és } A \text{ összefüggő }\}$$

halmaz tartalmazza a-t és összefüggő (lásd a 3.1.6 állítást). □

3.1.10. definíció. Az X topologikus tér maximális összefüggő részhalmazait X *komponenseinek* nevezzük.

3.1.11. következmény. *X komponensei X egy partícióját alkotják.* □

3.1.12. megjegyzés. Hívjuk az $x, y \in X$ pontokat ekvivalensnek, ha létezik olyan összefüggő halmaz, mely tartalmazza mindkettőt. Megmutatható, hogy ez a reláció ekvivalenciareláció. A megfelelő ekvivalenciaosztályok pontosan X komponensei.

3.1.13. állítás. *Minden K komponens zárt halmaz.*

Bizonyítás. Mivel $\bar{K}$ is összefüggő, K maximalitása miatt $\bar{K} = K$. □

3.1.14. megjegyzés. Ha véges sok komponens van, akkor ebből nyilván következik, hogy a komponensek nyílt halmazok is — hiszen ekkor egy nyílt halmaz véges sok zárt halmaz uniójának komplementere. Általában ez azonban nem igaz. Feladat: bizonyítsuk be, hogy a racionális számok terében (az számegyenesről örökölt topológiában) az egypontú halmazok a komponensek — és ezek nem nyíltak.

Az X teret *totálisan összefüggéstelennek* nevezzük, ha komponensei az egypontú halmazok. Totálisan összefüggéstelen tehát egy tetszőleges diszkrét tér, a $\mathbb{Q}$ és a Cantor-halmaz is.

3.2 Utak, útszerű összefüggőség

3.2.1. definíció. Az X topologikus tér egy *útjának* (pályájának, folytonos görbéjének) nevezünk egy $f\colon[0,1] \longrightarrow X$ folytonos leképezést. Az f út *kezdőpontja* $f(0)$, *végpontja* $f(1)$. Az f út *hurok*, ha $f(0) = f(1)$.

3.2.2. definíció. Amennyiben $f(1) = g(0)$, akkor definiáljuk f és g utak $f * g$ *szorzatát* a következőképpen:

$$\begin{aligned} t &\mapsto f(2t) && \text{ha } 0 \le t \le \tfrac{1}{2}, \\ t &\mapsto g(2t-1) && \text{ha } \tfrac{1}{2} \le t \le 1. \end{aligned}$$

A fenti definíció korrektségéhez ellenőrizni kell, hogy $f * g$ valóban folytonos. A $t = 1/2$ pont kivételével ez mindenhol nyilvánvaló. A $t = 1/2$ pontbeli folytonosság pedig következik az alábbi általánosabb lemmából.

3.2.3. lemma. (Ragasztási lemma) *Ha az X tér felbomlik az $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ zárt halmazok (nem feltétlenül diszjunkt) uniójára, és egy $f\colon X \longrightarrow Y$ leképezés minden F_i-re megszorítva folytonos, akkor f folytonos.*

Bizonyítás. Azt fogjuk bizonyítani, hogy egy $H \subset Y$ zárt halmaz ősképe zárt.

$$f^{-1}(H) = \cup_{i=1}^{n} (f|_{F_i})^{-1}(H),$$

ahol az i-edik tag zárt F_i-ben, így X-ben is. Véges sok zárt halmaz egyesítése pedig zárt. □

3.2.4. definíció. Az X tér útszerűen összefüggő, ha bármely két pontja úttal összeköthető. (Vagyis van olyan út, melynek az adott pontok a kezdő- ill. végpontjai.)

3.2.5. állítás. *Ha X útszerűen összefüggő, akkor összefüggő is.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy x_0 pontot X-ben. Bármely $x \in X$ összeköthető x_0-val egy f_x út mentén. Az f_x utak képhalmazai nyilván összefüggők, és egyesítésük az egész X tér. Emellett bármely kettő metszete tartalmazza x_0-t. Tehát X összefüggő. □

3.2.6. megjegyzés. A fenti állítás visszafelé nem igaz. Az

$$X = \{(0,0)\} \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in (0,1)\}$$

halmaz az $\mathbb{R}^2$ topológiájából örökölt topológiában összefüggő, de nem útszerűen összefüggő. (Feladat: bizonyítsuk be ezt az állítást.)

3.2.7. állítás. *Útszerűen összefüggő tér folytonos képe útszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen y_0 és y_1 a képtér egy-egy pontja. Legyenek x_0 és x_1 ezek ősképében. Az ezeket összekötő f utat az adott folytonos függvénnyel komponálva az y_0-at y_1-gyel összekötő utat kapunk. □

3.2.8. definíció. Az X tér *útszerűen összefüggő komponensei* a maximális útszerűen összefüggő halmazok.

3.2.9. állítás. *Az útszerűen összefüggő komponensek az X egy partícióját alkotják.* □

Hívjuk az x és y pontokat ekvivalensnek, ha létezik őket összekötő út. Megmutatható, hogy az így definiált reláció ekvivalenciareláció. Ennek osztályai pontosan az útszerűen összefüggő komponensek.

Az útszerűen összefüggő komponensek alkotta partíció általában finomabb, mint a komponensek által alkotott partíció. Néha azonban e kettő egybeesik.

3.2.10. állítás. *Ha X összefüggő és lokálisan útszerűen összefüggő (vagyis minden pontjának van útszerűen összefüggő környezete), akkor X útszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. A lokális útszerűen összefüggőség miatt az útszerűen összefüggő komponensek nyíltak. Mivel az útszerűen összefüggő komponensek egy partíciót alkotnak, így ebből az is következik, hogy e komponensek zártak is. Ebből következik, hogy csak egyetlen ilyen komponens van, vagyis X útszerűen összefüggő. □

3.2.11. következmény. *Ha az X tér lokálisan útszerűen összefüggő, akkor az útszerűen összefüggő komponensek megegyeznek az összefüggő komponensekkel.* □

3.2.12. példa. Az $\mathbb{R}^n$ nyílt alterei ilyen tulajdonságúak.

4. fejezet

Megszámlálhatósági axiómák

4.1 Megszámlálhatósági axiómák

4.1.1. definíció. Egy X topologikus tér M_2-*tér* (azaz eleget tesz a második megszámlálhatósági axiómának), ha létezik megszámlálható bázisa.

4.1.2. példa. A diszkrét terek közül pontosan a megszámlálható alaphalmazúak ilyenek.

4.1.3. állítás. *Az M_2 tulajdonság öröklődő, vagyis, egy M_2-tér bármely altere is M_2-tér.*

Bizonyítás. Az altér metszetei a tér bázisával az altér bázisát alkotják. □

4.1.4. definíció. Egy topologikus tér *szeparábilis*, ha van megszámlálható sűrű részhalmaza.

4.1.5. feladat. Adjunk példát, mely bizonyítja, hogy ez a tulajdonság nem öröklődik.

4.1.6. állítás. *Minden M_2-tér szeparábilis.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy megszámlálható bázist, s ennek minden (nem-üres) B eleméből válasszunk egy x_B pontot. Ezek összessége sűrű lesz, hiszen minden (nem-üres) nyílt halmaz tartalmaz egy (nem-üres) B báziselemet. □

4.1.7. megjegyzés. A fordított állítás nem igaz. Létezik tér, mely szeparábilis, de nem M_2-tér. Feladat: bizonyítsuk be, hogy a 1.2.3 példában szereplő tér ilyen (alkalmas X alaphalmazra).

4.1.8. tétel. *Ha az (X, ρ) metrikus tér szeparábilis, akkor M_2-tér.*

Bizonyítás. Legyen S egy megszámlálható sűrű részhalmaza X-nek. A $\Sigma = \{D(s, \frac{1}{n}) \mid s \in S, n \in \mathbb{N}\}$ halmazrendszer egy megszámlálható bázis X-ben; hiszen legyen U egy nyílt halmaz, és $x \in U$. Ekkor létezik olyan természetes szám, hogy $D(x, \frac{1}{n}) \subset U$. Mivel S sűrű, így $D(x, \frac{1}{2n})$-ben van S-beli s elem. A háromszög-egyenlőtlenség miatt $D(s, \frac{1}{2n}) \subset D(x, \frac{1}{n}) \subset U$, tehát Σ valóban bázis. □

4.1.9. definíció. Egy X topologikus tér *fedése* egy olyan $H \subset P(X)$ halmazrendszer, melyre igaz, hogy minden $x \in X$-re létezik olyan $A \in H$, melyre $x \in A$. Egy fedés nyílt/zárt, ha elemei nyíltak/zártak.

4.1.10. tétel. (Lindelöf) *Egy M_2-tér minden nyílt fedéséből kiválasztható megszámlálható (nyílt) fedés.*

Bizonyítás. Legyen $H = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ az X tér nyílt fedése. Ha $\Sigma = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ egy megszámlálható bázis, akkor minden A_α előáll $A_\alpha = \cup B^\alpha_{i_k}$ alakban. Legyen

$$\Sigma' = \{B \in \Sigma \mid B \text{ szerepel valamelyik } A_\alpha \text{ fenti felbontásában }\}.$$

Nyilvánvaló, hogy Σ' megszámlálható nyílt fedés. Most minden $B' \in \Sigma'$-höz válasszunk egy A_α-t, melyre $B' \subset A_\alpha$. Ilyen definíció szerint létezik. Ezen A_α-k összessége egy megszámlálható részfedése H-nak. □

4.1.11. definíció. Legyen x egy X topologikus tér egy pontja. Az x környezeteinek egy $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ halmazát x *környezetbázisának* nevezzük, ha x minden V környezetére létezik olyan $j \in J$, hogy $U_j \subset V$.

4.1.12. példa. Egy metrikus tér x pontjának (megszámlálható) környezetbázisa az $\{D(x, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz.

4.1.13. definíció. Egy X topologikus tér M_1-*tér*, ha minden pontnak van megszámlálható környezetbázisa.

Ha Σ bázis X-ben, akkor $\Sigma_x = \{B \in \Sigma \mid x \in B\}$ környezetbázisa X-nek. Ezek szerint nyilván igaz, hogy minden M_2-tér egyben M_1-tér is. Ellenben ez fordítva nem igaz. (Feladat: mutassunk példát, mely alátámasztja ezt.)

Ha egy pontnak van megszámlálható környezetbázisa, akkor nyilván van megszámlálható csökkenő környezetbázisa $(U_1 \supset U_2 \supset \dots)$ is. (Feladat: bizonyítsuk be ezt az állítást.)

4.1.14. definíció. Egy $f\colon X \longrightarrow Y$ leképezés *sorozatfolytonos*, ha minden (x_n) X-beli sorozatra $\lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n)$. (Az egyszerűség kedvéért itt mindkét térről tegyük fel, hogy T_2-tér, vagyis egy konvergens sorozatnak csak egy határértéke legyen.) Ha ezt a feltételt csak olyan (x_n) sorozatokra kötjük ki, melyek x-hez tartanak, akkor azt mondjuk, hogy f sorozatfolytonos x-ben.

4.1.15. állítás. *Ha $f\colon X \longrightarrow Y$ folytonos, akkor sorozatfolytonos.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \longrightarrow x \in X$ egy konvergens sorozat, és legyen V az $f(x)$ egy környezete. Az $U = f^{-1}(V)$ környezete lesz x-nek, így elég nagy indexre $x_n \in U$ teljesül. Ekkor viszont ezekre az indexekre $f(x_n) \in V$ teljesül, vagyis $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. □

4.1.16. tétel. *Ha X egy M_1-tér és $f\colon X \longrightarrow Y$ sorozatfolytonos x-ben, akkor f folytonos is x-ben.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy f sorozatfolytonos, de nem folytonos x-ben. Ezek szerint létezik V környezete $f(x)$-nek, hogy x bármely U környezetére $f(U) \not\subset V$ teljesül. Tekintsük egy megszámlálható csökkenő bázisát x-nek: $U_1 \supset U_2 \supset \dots$. Minden i-re van tehát egy olyan $x_i \in U_i$ pont, melyre $f(x_i) \notin V$. Ekkor viszont f nem sorozatfolytonos x-ben, hiszen $x_n \longrightarrow x$, de $f(x_n) \not\longrightarrow f(x)$. □

5. fejezet

Kompaktság

5.1 Kompakt terek

Legyen X egy topologikus tér. Tekintsük a következő tulajdonságokat:

(1) X minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés;
(2) ha X-ben adottak az F_α zárt halmazok, melyekre bármely véges sok metszete nem üres, akkor $\cap F_\alpha \neq \emptyset$;
(3) X minden megszámlálható nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés;
(4) ha X-ben adott megszámlálható sok F_i zárt halmaz, melyekre bármely véges sok metszete nem üres, akkor $\cap F_i \neq \emptyset$;
(5) (Cantor-tulajdonság) Nem-üres, zárt halmazok $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ csökkenő sorozatára $\cap F_i \neq \emptyset$;
(6) minden végtelen halmaznak van torlódási pontja;
(7) minden X-beli sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

5.1.1. definíció. Az X tér *kompakt*, ha teljesül rá az (1) tulajdonság.

5.1.2. definíció. Az X tér *megszámlálhatóan kompakt*, ha teljesül rá a (3) tulajdonság.

5.1.3. definíció. Az X tér *sorozatkompakt*, ha teljesül rá a (7) tulajdonság.

5.1.4. tétel. *A fenti tulajdonságok között az alábbi diagramban megadott implikációk állnak fenn:*

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[rrrrr, bend right, to=1-6] & (2) \arrow[r] & (3) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[ll, bend right, "M_2"'] & (4) \arrow[r, leftrightarrow] & (5) & (6) \arrow[r, "M_1"] & (7) \arrow[ll, bend right]
\end{tikzcd}$$

ahol a nyilakra írt feltétel a nyíl által jelölt következtetés feltételét jelöli.

A tétel bizonyítását az alábbi állítások adják.

5.1.5. állítás. *Az (1) és (2) tulajdonság ekvivalens.*

Bizonyítás. Az (1) tulajdonságot a benne szereplő nyílt halmazok komplementereire (indirekt) kimondva pontosan a (2) tulajdonságot kapjuk. □

5.1.6. állítás. *A (3), (4) és (5) tulajdonság ekvivalens.*

Bizonyítás. A (3) és (4) ekvivalenciája úgy következik, mint az előző állításban. A (4) $\Rightarrow$ (5) következtetés nyilvánvaló. Most bebizonyítjuk az (5) $\Rightarrow$ (4) irányt. Legyenek az F_i-k a (4) tulajdonságban szereplő zárt halmazok. Azt kell belátnunk, hogy metszetük nem üres. Legyen

$$F_i' = \cap_{j=1}^{i} F_i.$$

Minden F_i' zárt és nyilván $F_1' \supset F_2' \supset \ldots$. Ezek metszete tehát nem üres. Akkor viszont az F_i-k metszete sem üres. □

5.1.7. állítás. *Az (1) tulajdonságból következik a (6) tulajdonság.*

Bizonyítás. Legyen X kompakt és $A \subset X$ végtelen halmaz. Tegyük fel, hogy X-nek egyetlen pontja sem torlódási pontja A-nak, vagyis minden x-re létezik egy U_x nyílt halmaz (mely tartalmazza x-et) és $U_x \cap A$ véges. Tehát $\{U_x\}$ egy nyílt fedése X-nek, és nyilván nem választható ki belőle véges fedés, hiszen minden véges részhalmaza csak véges sok pontot fed le a végtelen A halmazból. □

5.1.8. állítás. *Ha X M_1-tér, akkor a (6) tulajdonságból következik a (7) tulajdonság.*

Bizonyítás. Legyen (x_n) egy X-beli sorozat. Ha létezik olyan $x \in X$, ami végtelen sokszor fordul elő a sorozatban, akkor ez egy állandó, tehát konvergens részsorozat. Ha ilyen nincs, akkor az értékek $A = \{x \in X \mid \exists n\ x = x_n\}$ halmaza végtelen. Erre alkalmazva a (6) tulajdonságot kapjuk, hogy A-nak létezik $b \in X$ torlódási pontja. Legyen U_i egy csökkenő környezetbázisa b-nek. Mivel b torlódási pontja A-nak, így minden i-re létezik olyan $x_{n_i} \in U_i$, hogy $n_i > n_{i-1}$. Tehát az (x_{n_i}) sorozat határértéke b. □

5.1.9. állítás. *Ha X M_2-tér, akkor a (3) tulajdonságból következik az (1) tulajdonság.*

Bizonyítás. M_2-térben tetszőleges nyílt fedésből a Lindelöf-tétel szerint kiválasztható megszámlálható nyílt fedés. Ebből állításunk következik. □

5.1.10. állítás. *A (7) tulajdonságból következik az (5) tulajdonság.*

Bizonyítás. Legyen $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ zárt halmazok egy csökkenő sorozata. Minden i-re válasszunk egy $x_i \in F_i$ pontot. Az (x_i) sorozat egy konvergens (x_{i_k}) részsorozatának határértéke legyen x. Megmutatjuk, hogy $x \in \cap F_m$. Ugyanis ha $i_k > m$, akkor $x_{i_k} \in F_m$ (hiszen $x_{i_k} \in F_{i_k} \subset F_m$), tehát $x \in F_m$. S mivel ez minden m-re teljesül, így valóban $x \in \cap F_m$. □

Az (1)$\to$(3) állítás bizonyítása triviális, így az 5.1.4 tétel bizonyítását befejeztük. □

5.1.11. definíció. Egy topologikus tér A részhalmaza kompakt, ha az X-ből örökölt (altér-) topológiában kompakt.

5.1.12. megjegyzés. Ekvivalens definícióhoz jutunk, ha azt kötjük ki, hogy ha $\{U_\alpha\}$ X-beli nyílt halmazok lefedik A-t, akkor kiválasztható közülük véges sok, mely lefedi A-t.

5.1.13. állítás. *Kompakt tér zárt részhalmaza kompakt.*

Bizonyítás. Fedje le az A zárt halmazt az $\{U_\alpha\}$ fedés. Ekkor Az $\{U_\alpha, X - A\}$ egy nyílt fedése X-nek, így abból kiválasztható véges fedés. Ebből a véges fedésből $X - A$-t elhagyva (ha egyáltalán benne volt), az A egy véges fedését kapjuk. □

5.1.14. állítás. *Kompakt tér folytonos képe is kompakt. (Tehát ha X kompakt és $f\colon X \longrightarrow Y$ folytonos függvény, akkor $f(X)$ is kompakt.)*

Bizonyítás. Legyen $\{U_\alpha\}$ egy nyílt fedése $f(X)$-nek. Ekkor a folytonosság definíciója miatt $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ egy nyílt fedése X-nek. Ebből kiválasztható tehát egy véges $\{f^{-1}(U_\beta)\}$ fedés. Ekkor $\{U_\beta\}$ egy véges fedése $f(X)$-nek. □

5.1.15. megjegyzés. Ez utóbbi állítás úgy is igaz, hogy ha $f: X \longrightarrow Y$ folytonos és $A \subset X$ kompakt, akkor $f(A)$ kompakt. Ez egyszerűen következik a fenti állításból, ha azt $f|_A$-ra alkalmazzuk.

5.1.16. állítás. *Egy Hausdorff-tér kompakt részhalmaza zárt.*

Bizonyítás. Legyen az X T_2-tér egy kompakt részhalmaza A. Tekintsünk egy $y \notin A$ pontot. Ha $a \in A$, akkor léteznek U_y^a és U_a környezetei y-nak és a-nak, melyek diszjunktak. Az $\{U_a\}_{a\in A}$ nyílt fedése A-nak, így kiválasztható belőle egy véges fedés: U_{a_i}. Tekintsük ekkor a

$$\cap_i U_y^{a_i}$$

halmazt. Ez környezete lesz y-nak (mert véges metszet), és definíció szerint diszjunkt A-tól. Tehát y belső pontja $X - A$-nak, s mivel ez minden $y \in X - A$-ra igaz, így $X - A$ nyílt. □

5.1.17. tétel. *Ha X kompakt és T_2-tér, akkor T_4-tér is.*

Bizonyítás. Legyenek A és B diszjunkt zárt részhalmazai az X kompakt térnek. Tudjuk, hogy ekkor ők kompaktak is. Legyen továbbá $b \in B$. Az előző állítás bizonyításához hasonló módon láthatjuk, hogy léteznek U_b és V_A^b környezetei b-nek és A-nak, melyek diszjunktak. Ekkor az $\{U_b\}_{b\in B}$ egy nyílt fedése B-nek, tehát kiválasztható belőle véges fedés: U_{b_i} $(i = 1, \ldots, n)$. Az

$$U = \cup_i U_{b_i} \qquad \text{és} \qquad V = \cap_i V_A^{b_i}$$

diszjunkt környezetei lesznek B-nek és A-nak. □

5.1.18. tétel. *Ha X kompakt és Y T_2-tér valamint $x: X \longrightarrow Y$ folytonos injekció, akkor $f: X \longrightarrow f(X)$ homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Azt fogjuk bizonyítani, hogy $A \subset X$ zárt halmaz képe zárt $f(X)$-ben (hiszen ebből következik, hogy f^{-1} folytonos). Mivel X kompakt, így A is kompakt, tehát $f(A)$ is kompakt. Viszont T_2-tér kompakt részhalmaza zárt, így $f(A)$ zárt. □

(A fenti tétel ekvivalens azzal, hogy kompaktból T_2-térbe képező folytonos bijekció homeomerfizmus.) Vizsgáljuk most a kompakt metrikus tereket.

5.1.19. definíció. Egy X metrikus tér egy E részhalmazát *ε-hálónak* nevezzük, ha minden $x \in X$-re létezik $e \in E$, hogy $\rho(x, e) < \varepsilon$.

5.1.20. állítás. *Egy kompakt metrikus térben minden ε-ra létezik véges ε-háló. (Valójában elég feltenni a tér sorozatkompaktságát is.)*

Bizonyítás. Elég a második állítást bizonyítani. Ehhez definiálni fogunk egy x_n sorozatot. Legyen $x_1 \in X$ tetszőleges. Ha már definiáltuk x_i-t, akkor vizsgáljuk meg, hogy a $\{D(x_j, \varepsilon)\}_{j=1}^i$ lefedi-e X-et. Ha igen, akkor készen vagyunk, $\{x_1, \ldots, x_i\}$ egy véges ε-háló. Ha nem, akkor válasszunk tetszőlegesen

$$x_{i+1} \in X - \cup_{j=1}^i D(x_j, \varepsilon)$$

pontot.

Ha egyetlen i-re sem szakad meg ez a procedúra, akkor kaptunk egy olyan x_n sorozatot, melyben bármely i, j-re $\rho(x_i, x_j) > \varepsilon$, tehát ennek a sorozatnak nem lehet konvergens részsorozata, ami ellentmond annak, hogy X sorozatkompakt. □

5.1.21. következmény. *Ha X sorozatkompakt (vagy kompakt) metrikus tér, akkor szeparábilis.*

Bizonyítás. Legyen E_n egy véges $\frac{1}{n}$-háló. Nyilvánvaló, hogy

$$\cup_{n=1}^{\infty} E_n$$

egy megszámlálható sűrű részhalmaz. □

5.1.22. következmény. *Ha X metrikus tér, akkor X kompaktsága és sorozatkompaktsága ekvivalens.*

Bizonyítás. Azt kell bizonyítanunk, hogy egy sorozatkompakt metrikus tér kompakt is. Bizonyítottuk, hogy ez a tér szeparábilis és M_1. Tudjuk viszont, hogy a szeparábilis metrikus terek M_2 terek is, ezekben viszont a kompaktság és sorozatkompaktság ekvivalens. □

5.1.23. megjegyzés. Tudjuk analízisből, hogy az $\mathbb{R}^n$ egy altere pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt. (Hiszen, ha $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, akkor $A \subset I^n$ alkalmas I intervallumra. Az I^n kompakt, mert I kompakt [Borel-tétel] — később látni fogjuk, hogy kompakt terek „szorzata" kompakt — tehát A is kompakt.) Vizsgáljuk meg, ebből mennyi általánosítható metrikus terekre.

5.1.24. állítás. *Egy metrikus tér kompakt részhalmaza korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Zárt, mert a metrikus tér T_2-tér, és korlátos, mert van véges 1-hálója. □

6. fejezet

Konstrukciók

6.1 Szorzatterek

6.1.1. definíció. Legyenek X és Y topologikus terek. Az $X \times Y$ halmazon adott topológiát *szorzattopológiának* nevezzük, ha egy bázisa az

$$\{U \times V \mid U \text{nyílt} X\text{-ben}, V \text{nyílt} Y\text{-ben}\}$$

halmazrendszer. A szorzattopológiával ellátott $X \times Y$ teret az X és Y tér *szorzatterének* vagy szorzatának nevezzük, és $X \times Y$-nal jelöljük.

Meg kell vizsgálnunk persze, hogy ez a definíció korrekt-e; vagyis meg kell vizsgálni, hogy a fenti halmazrendszer kielégíti-e a bázisra szabott feltételeinket. Ez viszont egyszerűen következik abból az észrevételből, hogy

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2).$$

Az $(x, y) \mapsto x$ és $(x, y) \mapsto y$ formulákkal adott $X \times Y \longrightarrow X$ illetve $X \times Y \longrightarrow Y$ leképezéseket *vetítéseknek* nevezzük és pr_1 ill. pr_2-vel jelöljük.

6.1.2. feladatok. **(a)** Bizonyítsuk be, hogy az $X \times Y$ halmazon a szorzattopológia a leggyengébb olyan topológia, melyre nézve pr_1 és pr_2 folytonos.
(b) Legyen $f : Z \longrightarrow X \times Y$ egy függvény. Az f pontosan akkor folytonos, ha $pr_1 \circ f$ és $pr_2 \circ f$ is folytonos.
(c) Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in X$-re $x \times Y$ homeomorf Y-nal.

6.1.3. tétel. *Kompakt X és Y terek $X \times Y$ szorzata is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $\{W'_\alpha\}$ egy nyílt fedése $X \times Y$-nak. Ennek minden eleme előáll bázisbeli elemek uniójaként (a definícióban említett bázist használva). Tekintsük minden W'_α helyett az őt előállító bázisbeli nyílt halmazokat. Így kapunk egy új $W = \{W_\beta\}$ fedést. Először erre fogjuk belátni, hogy létezik véges részfedése. Tekintsünk egy $x \in X$-et; az $x \times Y$ halmazt („fibrumot") is lefedik bizonyos W_β-k. Mivel ez homeomorf egy kompakt térrel (Y-nal), így véges sok $W^x_i = U^x_i \times V^x_i$ is lefedi. Legyen $U^x = \cap_i U^x_i$. Ekkor a W^x_i halmazok nyilván lefedik az $U^x \times Y$ halmazt is. Ha az összes $x \in X$-re tekintjük az U^x halmazokat, akkor X egy fedését kapjuk, amiből kiválasztunk egy U^{x_j} véges fedést. Azt kaptuk, hogy az $\{W^{x_j}_i\}$ egy véges részfedése W-nek. A $\{W'_\alpha\}$ egy véges részfedését kapjuk, ha minden $W^{x_j}_i$-re választunk egy W'_{ij} elemet, ami őt tartalmazza. $\square$

6.1.4. állítás. *Összefüggő X és Y terek $X \times Y$ szorzata is összefüggő.*

Bizonyítás. Az (x_1, y_1) és az (x_2, y_2) pontok egy összefüggőségi komponensben vannak, mert mindkettő ugyanabban a komponensben van mint (x_2, y_1). $\square$

6.1.5. állítás. *Útszerűen összefüggő X és Y terek $X \times Y$ szorzata is útszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításával analóg bizonyítás adható. □

A következő állítások könnyen bizonyíthatók.

6.1.6. állítás. *T_1-terek szorzata is T_1-tér. T_2-terek szorzata is T_2-tér. T_3-terek szorzata is T_3-tér. M_1-terek szorzata is M_1-tér. M_2-terek szorzata is M_2-tér.* □

6.1.7. feladat. Mutassuk meg, hogy T_4-terek szorzata nem feltétlenül T_4-tér.

6.1.8. állítás. *$(X \times Y) \times Z$ homeomorf $X \times (Y \times Z)$-vel.* □

Ez utóbbi állítás segítségével könnyen értelmezhető véges sok tényezős $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ szorzat, ti. $(\ldots(X_1 \times X_2) \times X_3) \times \ldots \times X_n)$-ként. Definiálható ugyanez a fogalom expliciten úgy, hogy az $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ téren azt a topológiát tekintjük, melynek bázisa az

$$\{U_1 \times \ldots \times U_n \mid U_i \text{ nyílt } X_i \text{ -ben }\}$$

halmazrendszer.

6.1.9. példa. $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, viszont $S^p \times S^q \neq S^{p+q}$. Az $S^1 \times S^1$ szorzatot *tórusznak* nevezzük.

Definiálni szeretnénk a végtelen sok tényezős szorzatot is. Legyen A egy indexhalmaz, és minden $\alpha \in A$-ra X_α egy topologikus tér. Először, mint halmazt definiáljuk:

$$\Pi X_\alpha = \{c : A \longrightarrow \cup X_\alpha \mid \text{ minden } \alpha \in A \text{ -ra } c(\alpha) \in X_\alpha\}.$$

A $c(\alpha)$-t $(= c_\alpha)$ a $c \in \Pi X_\alpha$ elem α-adik koordinátájának hívjuk. A $pr_\alpha \colon \Pi X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$, $c \mapsto c(\alpha)$ függvényt pedig az α-adik vetítésnek nevezzük.

6.1.10. definíció. A ΠX_α-n azt a legszűkebb topológiát, melyre nézve minden pr_α folytonos, *szorzattopológiának* nevezzük. Ezzel a topológiával ΠX_α-t az X_α-k *szorzatterének* nevezzük.

6.1.11. megjegyzés. Ugyanezt a topológiát definiálhatjuk, ha kikötjük, hogy ΠX_α-n a

$$\{pr_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in A,\ U_\alpha \text{ nyílt } X_\alpha \text{ -ban }\}$$

halmazrendszer legyen egy előbázis. (Ugyanezt a topológiát adja, ha a következő halmazrendszer a bázis:

$$\{\Pi U_\alpha \mid U_\alpha \text{ nyílt } X_\alpha \text{ -ban és véges sok } \alpha \text{ kivételével } U_\alpha = X_\alpha\}.)$$

6.1.12. feladat. (a) Bizonyítsuk be a fenti megjegyzést.
(b) Legyen $f \colon Z \longrightarrow \Pi X_\alpha$ egy függvény. Az f pontosan akkor folytonos, ha $pr_\alpha \circ f$ folytonos minden α-ra.

6.1.13. tétel. (Tyihonov) *Kompakt terek szorzata kompakt. Vagyis, ha minden α-ra X_α kompakt, akkor $X = \Pi X_\alpha$ is kompakt.*

Bizonyítás. Az X tér részhalmazainak egy rendszerét nevezzük centráltnak, ha közülük bármely véges sok metszete nem üres. Így elég azt belátnunk, hogy ha H az X részhalmazainak egy centrált rendszere, akkor $\cap\{\bar{B} \mid B \in H\} \neq \emptyset$. Először is H kiterjeszthető egy olyan $H^* \supset H$ centrált rendszerré, mely maximális a „centráltság" tulajdonságra, vagyis, ha hozzáveszünk még egy halmazt, akkor a rendszer már nem lesz centrált. Ez a kiterjesztési tulajdonság a Teichmüller-Tukey lemmából következik. Könnyen belátható, hogy ha H^*-ra belátjuk az állítást, akkor H-ra is. Vegyük észre azonban, hogy egy ilyen maximális H^* halmazrendszer szükségszerűen kielégíti a következőket:
(1) $B, C \in H^* \Rightarrow B \cap C \in H^*$;
(2) $B \subset C, B \in H^* \Rightarrow C \in H^*$ valamint

(3) $C \cap B \neq \emptyset$ minden $B \in H^*$-ra $\Rightarrow C \in H^*$.

Legyen $\alpha \in A$. Ekkor $\{pr_\alpha(B) \mid B \in H^*\}$ centrált rendszer lesz X_α-ban, tehát a

$$\cap\{\overline{pr_\alpha(B)} \mid B \in H^*\}$$

halmaz nem üres. Legyen ennek egy eleme x_α. Ezt az x_α elemet minden α-ra elkészítjük, s tekintjük azt az $x \in X$ elemet, melynek az α-adik koordinátája x_α.

Legyen $U_\alpha \subset X_\alpha$ az x_α egy tetszőleges környezete. Ekkor nyilván $pr_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap B \neq \emptyset$ minden $B \in H^*$-ra. Így a fenti (3) tulajdonság miatt $pr_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in H^*$.

A fenti (1) tulajdonságot használva ebből az következik, hogy ha valamely $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$-ra U_{α_i} az x_{α_i} egy környezete, akkor $\cap pr_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \in H^*$. Az ilyen típusú halmazok x egy környezetbázisát alkotják, így a (2) tulajdonság miatt x minden környezete H^*-beli halmaz. Ebből az következik, hogy minden H^*-beli halmaz metszi x minden környezetét, tehát minden $B \in H^*$-ra $x \in \bar{B}$. Ezt akartuk bizonyítani. □

6.1.14. definíció. Egy X metrikus $\mathrm{diam}(X)$ tér *átmérőjén* a benne fellépő összes lehetséges távolság szuprémumát értjük, vagyis

$$\mathrm{diam}(X) = \sup\{\rho(x, x') \mid x, x' \in X\}.$$

6.1.15. állítás. *Ha* (X_i, ρ_i) $(i \in \mathbb{N})$ *terek metrikus terek és mindegyik átmérője* ≤ 1, *akkor* $X = \Pi_{i \in \mathbb{N}} X_i$ *is metrizálható (homeomorf egy metrikus térrel).*

Bizonyítás. A

$$\rho(x, x') = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(pr_i(x), pr_i(x'))}{2^i}$$

kifejezés értelmes (konvergens), mert a terek átmérője legfeljebb 1. Könnyen ellenőrizhető, hogy az így definiált ρ metrika X-en és az általa definiált topológia megegyezik a szorzattopológiával. (Feladat: bizonyítsuk be ezt az állítást.) □

6.1.16. definíció. A $[0,1]$ intervallum önmagával vett megszámlálhatóan végtelenszeres szorzatát I^ω-val jelöljük, tehát $I^\omega = \Pi_{i \in \mathbb{N}}[0,1]$.

A fentiek szerint tehát I^ω metrikus tér.

6.1.17. tétel. (Uriszon metrizációs tétele) *Ha X topologikus tér T_4- és M_2-tér, akkor metrizálható (azaz homeomorf egy metrikus térrel).*

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy X beágyazható I^ω-ba (vagyis létezik egy $X \longrightarrow I^\omega$ injekció). Ez a beágyazás homeomorfizmus lesz a képhalmazra, az viszont egy metrikus tér altere, tehát maga is metrikus.

Legyen Σ az X egy megszámlálható bázisa. Jelöljük A-val a következő — szintén megszámlálható — halmazt:

$$A = \{(U, V) \mid \bar{U} \subset V, \quad U, V \in \Sigma\}.$$

Ha $(U, V) \in A$, akkor legyen $f_{UV}: X \longrightarrow [0,1]$ az a függvény, amire $f_{UV}|_{\bar{U}} = 0$ és $f_{UV}|_{X-V} = 1$. Ilyen leképezés létezik, hiszen X T_4-tér. Legyen $sz: \mathbb{N} \longrightarrow A$ az A halmaz egy felsorolása, s tekintsük azt az $e: X \longrightarrow I^\omega$ függvényt, melyet az

$$x \mapsto (x_i), \qquad x_i = f_i(x)$$

képlet definiál. Be fogjuk látni, hogy

(1) e folytonos,

(2) e injektív,

(3) és hogy e nyílt leképezés (nyílt halmaz képe nyílt).

Ezekből következik, hogy e homoeorfizmus X és $e(X)$ között. Az (1) állításhoz elég azt belátni, hogy $pr_i \circ e: X \longrightarrow I$ folytonos, de $pr_i \circ e = f_i$, ami definíció szerint folytonos.

A (2) bizonyításához legyenek $x, y \in X$ különböző pontok. Létezik olyan $V \in \Sigma$ nyílt környezete x-nek, mely nem tartalmazza y-t. Szintúgy létezik $U \in \Sigma$ környezete x-nek, melyre $\bar{U} \subset V$. Ez a két állítás azért igaz, mert X T_4-tér. Legyen az $(U, V) \in A$ párnak a sorszáma $sz^{-1}((U, V)) = i$. Ekkor $f_i(x) = 0, f_i(y) = 1$, hiszen $f|_U = 0$ és $x \in U$, valamint $f|_{X-V} = 1$ és $y \in X - V$. Tehát $f(x) \neq f(y)$.

A (3) belátásához legyen $G \subset X$ egy nyílt halmaz, s ennek g egy pontja. Azt kell belátnunk, hogy $e(g)$ belső pontja $e(G)$-nek. Mivel X T_4-tér, így léteznek $U, V \in \Sigma$ nyílt halmazok, hogy $g \in U \subset \bar{U} \subset V \subset G$. Az ehhez az (U, V) párhoz tartozó i koordinátára tehát $f_i(g) = 0$, míg $f_i(z) = 1$ minden $z \in Z = X - G$ elemre. Legyen

$$W = \{e(x) \in I^\omega \mid x \in X,\ f_i(x) < 1\}.$$

A W halmaz nyílt $e(X)$-ben, hiszen W-t $e(X)$-ből a $pr_i^{-1}([0,1))$ nyílt halmaz metszi ki. Emellett $e(g) \in W \subset e(G)$ teljesül definíció szerint. Tehát $e(g)$ nyílt $e(G)$-ben. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. □

6.2 Faktorterek

Legyen adott az X tér pontjainak egy S osztályozása ($\Leftrightarrow$ partíciója, felosztása), amin azt értjük, hogy X előáll, mint egy $\cup_\alpha A_\alpha$ diszjunkt unió. Ekkor az osztályok halmazát X_S-sel jelöljük. Ezen szeretnénk topológiát definiálni. Ehhez előbb egy természetes $q\colon X \longrightarrow X_S$ leképezést definiálunk, mely minden ponthoz hozzárendeli azt az osztályt, amelynek ő eleme — szokásos jelöléssel: $q\colon x \mapsto [x]$.

6.2.1. definíció. A legbővebb olyan topológiát X_S-en, melyre nézve a q leképezés folytonos az X_S *faktortopológiájának* (kvócienstopológiájának) nevezzük. Ezzel a topológiával ellátva X_S-et az X S szerinti *faktorterének* (kvóciensterének) nevezzük, és szintén X_S-sel jelöljük.

A faktortopológia létezését a következő állítás igazolja, melynek során megkonstruáljuk a faktortopológiát.

6.2.2. állítás. *Az X_S nyílt halmazai előállnak mint az X nyílt halmazainak q-képei.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az $\{U \subset X_S | \ q^{-1}(U) \text{ nyílt } X\text{-ben}\}$ elemei mind nyíltak, ha q folytonos. Ez a halmazrendszer viszont kielégíti a nyílt halmazok rendszerére tett kikötéseket, tehát az állítást bizonyítottuk. □

6.2.3. példák. **(a)** Legyen $X = [0, 1]$, és az S partíció pedig legyen $\{\{0, 1\}, \{t\}_{t\in(0,1)}\}$. Ekkor $X_S = S^1$.
(b) Legyen X a $[0, 1] \times [0, 1]$ tér (tehát a négyzet). Az ábrák bizonyos partíciókat ,,kódolnak el". Ezt úgy kell érteni, hogy a négyzet azon pontjai, melyek nem tartoznak egyik ábrán lévő nyílhoz sem (például a négyzet belseje), azok egyelemű osztályokat alkotnak. Ezeken kívül lesznek még kételemű osztályok, méghozzá az azonos betűvel jelzett nyilak egymásnak megfelelő pontjai legyenek egy osztályban (ahol az ,,egymásnak megfelelés" azt jelenti, hogy az egyik nyíl végpontjától d távolságra lévő pont megfelel a másik — ugyanolyan betűjelű — nyíl végpontjától d távolságra lévő pontnak). Ezek a partíciók az ábrákon sorra a következő tereket definiálják: henger (szalag), Möbius-szalag, tórusz, Klein-kancsó, (valós) projektív sík.

ABRAK????

(c) Tekintsük S^n-en a következő S partíciót: $\{\{x, -x\}_{x\in S^n}\}$. Az így kapott faktorteret hívjuk n-dimenziós (valós) projektív térnek (jele: $\mathbb{R}P^n$). Feladat: igazoljuk, hogy a 2-dimenziós projektív tér megegyezik (homeomorf) az előző példában definiált projektív síkkal.
(d) Tekintsük egy D^2 körlap és egy Möbius-szalag diszjunkt unióját. A Möbius-szalag határa S^1, így rögzíthetünk egy

$$\phi\colon \partial D^2 \longrightarrow \partial(\text{ Möbius-szalag })$$

homeomorfizmust. A diszjunkt unión legyen az S partíció $\{\{x, \phi(x)\}_{x\in\partial D^2}\}$. (Azokat a pontokat, melyek az itt adott partíció egyik osztályában sincsenek benne, egypontú osztályoknak gondoljuk.) Természetes elképzelés, hogy itt a két teret a ϕ leképezés mentén ,,összeragasztottuk". Feladat: mutassuk meg, hogy az így kapott faktortér a projektív sík.
(d) Tekintsük két Möbius szalag diszjunkt unióját. Mivel mindkettő határa egy körvonal, ezek közt van egy homeomorfizmus. Ragasszuk össze (ld. előző példa) e két teret e homeomorfizmus mentén. Feladat: mutassuk meg, hogy a Klein-kancsóval homeomorf teret kapunk.

6.2.4. megjegyzés. Szintén a projektív sík definíciójához jutunk, ha $\mathbb{R}^3$ origón átmenő egyenesinek pontjait azonosítjuk. Pontosabban $\mathbb{R}^3 - 0$ partícióját adja meg az $(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ ekvivalenciareláció.

7. fejezet

A fundamentális csoport

7.1 A fundamentális csoport definíciója

Mostantól már szigorúan él az a megállapodásunk, hogy minden felvetődő függvény folytonos.

7.1.1. definíció. Egy $F: X \times I \longrightarrow Y$ függvényt *homotópiának* nevezünk. Szokásos megállapodás, hogy $F(x,t)$-t $F_t(x)$-szel jelöljük. A fenti homotópiára azt mondjuk, hogy *összeköti* az $F_0: X \longrightarrow Y$ és $F_1: X \longrightarrow Y$ függvényt. (Szokásos módon I a $[0,1]$ intervallumot jelöli.)

Tehát a homotópia az $F_0: X \longrightarrow Y$ függvény folytonos deformációja $F_t: X \longrightarrow Y$-okon keresztül az $F_1: X \longrightarrow Y$ függvénybe.

7.1.2. példa. Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ egy konvex részhalmaz (például maga $\mathbb{R}^n$). Legyenek f és g tetszőleges $X \longrightarrow A$ függvények. Ilyenkor mindig létezik olyan homotópia, mely f-et és g-t összeköti, vegyük ugyanis az $F_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$ függvénycsaládot. Milyen gyengébb feltevéssel helyettesíthetnénk a konvexitást?

Jelölje a továbbiakban $C(X,Y)$ az $X \longrightarrow Y$ folytonos függvények halmazát. (Később bevezetünk rajta egy természetes topológiát is.)

7.1.3. definíció. Két $f, g \in C(X,Y)$ függvényt *homotópnak* nevezünk, ha létezik őket összekötő homotópia.

7.1.4. állítás. *A homotópia ekvivalenciareláció $C(X,Y)$-on. (Tehát jogos a fenti definíció megfogalmazása.)*

Bizonyítás. Reflexivitás: $f \sim f$, mert $F_t(x) = f(x)$ egy megfelelő homotópia köztük.

Szimmetria: Ha F homotópia f és g között, akkor $G_t(x) = F_{1-t}(x)$ összeköti g-t és f-et.

Tranzitivitás: Ha F illetve G homotópia összeköti f-et g-vel, illetve g-t h-val, akkor $H_t(x) = F(x, 2t)$ (ha $0 \le t \le \frac{1}{2}$) és $H_t(x) = G(x, 2t-1)$ (amennyiben $\frac{1}{2} \le t \le 1$) homotópia összeköti f-et és h-t. (A ragasztási lemmából következik, hogy H folytonos.) $\square$

A fenti ekvivalenciaosztályokat *homotópiaosztályoknak* nevezzük.

7.1.5. definíció. Az (X, A) rendezett párt *térpárnak* nevezzük, ha $A \subset X$ topologikus terek. Egy $f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ függvényen olyan $f: X \longrightarrow Y$ függvényt értünk, melyre $f(A) \subset B$. Ezek halmaza legyen $C((X, A), (Y, B))$. *Pontozott téren* egy $(X, \{x_0\})$ térpárt értünk, amit egyszerűen (X, x_0)-lal jelölünk. Legyen (X, A) egy térpár; ekkor *A-n kötött homotópián* egy $F: X \times I \longrightarrow Y$ homotópiát értünk, melyre $F_{t_1}(a) = F_{t_2}(a)$ minden $t_1, t_2 \in I$-re és minden $a \in A$-ra.

7.1.6. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a most definiált kötött homotópia is ekvivalenciareláció a megfelelő alaphalmazon.

Emlékezzünk az „út”, „utak szorzata”, „hurok” definíciókra. Legyen egy X topologikus tér egy pontja x_0. Legyen $F(X,x_0)$ az x_0 kezdő- és végpontú X-beli hurkok halmaza: $F(X,x_0) = C((I,\partial I),(X,x_0))$. Két ilyen hurkot homotópnak mondunk, ha mint $I \longrightarrow X$ leképezések közt létezik olyan H homotópia, hogy minden t-re $H_t(0) = H_t(1) = x_0$ — vagyis ∂I-n kötött homotópiáról van szó. Az $F(X,x_0)$ homotópiaosztályait (erre a kötött homotópiára nézve) jelöljük $\pi_1(X,x_0)$-lal.

7.1.7. feladat. Hány elemű $\pi_1(S^1,(1,0))$, $\pi_1(\mathbb{R}^n,0)$?

Mivel az $F(X,x_0)$-beli utak kezdő- és végpontja megegyezik, definiálható két ilyen szorzata.

7.1.8. állítás. *Az utak szorzata $F(X,x_0)$-on egy jól definiált szorzást határoz meg $\pi_1(X,x_0)$-on.*

Bizonyítás. Azt látjuk be, hogy u homotópiaosztályát $[u]$-val jelölve az $[f]*[g] = [f*g]$ egy jól definiált szorzás $\pi_1(X,x_0)$-on. Tehát azt kell belátni, hogy ha $f \sim f'$ és $g \sim g'$ $F(X,x_0)$-beli hurkok, akkor $f*g \sim f'*g'$. Ha $F\colon I\times I \longrightarrow X$ az f és f' közti, és $G\colon I\times I \longrightarrow X$ a g és g' közti (kötött) homotópia, akkor az $f*g$ és $f'*g'$-ot összeköti a következő (kötött) homotópiát a $H_s(t) = F_s(2t)$ $(0 \le t \le \frac{1}{2})$ illetve $H_s(t) = G_s(2t-1)$ $(\frac{1}{2} \le t \le 1)$ definíció adja meg. □

7.1.9. feladat. Fogalmazzuk meg precízen és bizonyítsuk be, hogy homotóp leképezések kompozíciója is homotóp. Ez az állítás igaz kötött homotópiára is.

7.1.10. megjegyzés. Egy olyan $\phi\colon I \longrightarrow I$ leképezés, melyre $\phi(0) = 0$ és $\phi(1) = 1$, mindig homotóp az $\mathrm{id}\colon I \longrightarrow I$ függvénnyel, hiszen $H_t(x) = tx + (1-t)\phi(x)$ megfelelő homotópia. Hasonlóan, ha $\phi(0) = \phi(1) = 0$, akkor $\phi \sim 0$, vagyis ϕ az azonosan 0 függvénnyel homotóp.

7.1.11. tétel. *A $\pi_1(X,x_0)$-on bevezetett szorzás csoportművelet.*

Bizonyítás. (1) Asszocialtivitás. Azt kell belátnunk, hogy $(u*v)*w \sim u*(v*w)$ tetszőleges u,v,w hurkokra. Ehhez definiáljuk a $\phi\colon I \longrightarrow I$ leképezést úgy, hogy $\phi(0) = 0, \phi(1/2) = 1/4, \phi(3/4) = 1/2, \phi(1) = 1$ teljesüljön, és egyébként pedig legyen $([0,1/2],[1/2,3/4],[3/4,1])$ szakaszonként lineáris. Ekkor a következő hurkok megegyeznek:

$$((u*v)*w)\circ\phi = u*(v*w).$$

A 7.1.9 feladatot és 7.1.10 megjegyzést használva ebből azt kapjuk, hogy

$$(u*v)*w \sim u*(v*w).$$

(2) Egységelem létezése. Legyen $e\colon I \longrightarrow X$ a konstans x_0 leképezés. Ennek osztálya egységelem lesz $\pi_1(X,x_0)$-ban. Legyen ugyanis $\phi\colon I \longrightarrow I$ a $[0,1/2]$ és $[1/2,1]$ szakaszokon lineáris, és $\phi(0) = 0, \phi(1/2) = 0, \phi(1) = 1$. Ekkor minden f hurokra $e*f = f\circ\phi$, s így minden f hurokra $e*f \sim f$, amit bizonyítanunk kellett. A jobboldali egység-tulajdonság bizonyítása ugyanígy történhet.

(3) Inverz létezése. Legyen f egy hurok. Azt állítjuk, hogy annak az $\bar{f}$ függvénynek a homotópiaosztálya lesz $[f]$ inverze, melyre $\bar{f}(t) = f(1-t)$ teljesül. Ugyanis ϕ-vel jelölve azt a $[0,1/2]$ és $[1/2,1]$ szakaszokon lineáris leképezést, melyre $\phi(0) = 0$, $\phi(1/2) = 1$ és $\phi(1) = 0$,

$$f*\bar{f} = f\circ\phi \sim f\circ 0 = e.$$

A „másik oldali inverz” tulajdonság hasonlóan bizonyítható. □

7.1.12. definíció. A most definiált művelettel ellátott $\pi_1(X,x_0)$ csoportot az X tér (x_0 kezdőpontú) *fundamentális csoportjának* (vagy első homotópikus csoportjának) nevezzük.

Tudjuk, hogy $\pi_1(\mathbb{R}^n,0) = 1$ és $\pi_1(D^n,0) = 1$.

7.1.13. tétel. *Ha $n > 1$, akkor $\pi_1(S^n,x_0) = 1$.*

Bizonyítás. Legyen f egy x_0 kezdőpontú hurok S^n-en. Azt kell belátnunk, hogy ez pontrahúzható (vagyis homotóp a konstans x_0 hurokkal). Ezt úgy is fogjuk mondani, hogy f nullhomotóp.

Először tegyük fel, hogy $f(I) \neq S^n$, vagyis van olyan p pont, mely nincs f képében. Ekkor a p pontból vetítő sztereografikus projekció (az alkalmas $\mathbb{R}^n$ altérre) egy $\phi: S^n - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfizmust indukál. $\mathbb{R}^n$-ben pedig minden hurok pontrahúzható, így $\phi \circ f$ is. Ezt a homotópiát ϕ^{-1} mentén visszahúzva f egy homotópiáját kapjuk, mely a konstans úttal köti össze.

Most vizsgáljuk az általános esetet (hiszen előfordulhat, hogy $f(I) = S^n$). Tekintsük az I egy olyan finom t_i felbontását, melyre $f[t_i, t_{i+1}]$ egy nyílt félgömbben van minden i-re (ld. a következő lemmát). Legyen $f_i = f|_{[t_i,t_{i+1}]}: [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow S^n$ és legyen $g_i: [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow S^n$ az $f(t_i)$-t és az $f(t_{i+1})$-et összekötő gömbi főkörív egy parametrizálása. Ekkor

$$f = f_1 * \ldots * f_n,$$

s mivel $f_i \sim g_i$ a végpontokat rögzítve (feladat: bizonyítsuk be), így

$$f \sim g_1 * \ldots * g_n = g.$$

Viszont g képe véges sok főkörív egyesítése, tehát ($n > 1$ esetén) $g(I) \neq S^n$, vagyis g (és ezért f is) nullhomotóp. □

A bizonyításban maradt egy tisztázatlan pont, a t_i felosztás létezése. Ezt bizonyítja a következő általánosabb lemma.

7.1.14. lemma. (Lebesgue) *Legyen f egy Q kompakt metrikus térből A topologikus térbe képező folytonos függvény, és legyen adva A-nak egy $\{U_\alpha\}$ nyílt fedése. Ekkor létezik olyan $\delta > 0$, hogy bármely $x, y \in Q$-ra, melyek $\rho(x, y)$ távolsága kisebb δ-nál létezik egy α, hogy $f(x), f(y) \in U_\alpha$.*

Bizonyítás. Ha nem létezik ilyen δ, akkor minden δ-ra, például $1/n$-re is léteznek $x_n, y_n \in Q$ pontok, amelyek távolsága $< 1/n$, de melyek képét nem fedi le egyetlen U_α sem együtt. Válasszunk ki x_n-ből egy konvergens részsorozatot (hiszen Q kompakt), legyen ez $x_{n_k} \longrightarrow l$. Mivel $\rho(x_n, y_n) < 1/n$, így $y_{n_k} \longrightarrow l$ is teljesül. Tekintsünk egy U_α-t ami lefedi $f(l)$-et. Az $f^{-1}(U_\alpha)$ környezete l-nek, így nyilván elég nagy N-re $x_N, y_N \in f^{-1}(U_\alpha)$. Ekkor viszont $f(x_N)$ és $f(y_N)$ pontokat tartalmazza az U_α halmaz, ami ellentmondás. □

7.1.15. feladat. A 7.1.13 tétel bizonyításában S^n milyen U_α fedését kell tekinteni?

A következőkben azt fogjuk vizsgálni, mennyire függ $\pi_1(X, x_0)$ az x_0 pont választásától.

7.1.16. tétel. *Ha X útszerűen összefüggő, akkor bármely két $x, x' \in X$-re $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, x')$.*

Bizonyítás. Legyen s egy út x-ből x'-be. Ekkor definiálhatjuk a $T_s: F(X, x) \longrightarrow F(X, x')$ leképezést az $f \mapsto \bar{s} * f * s$ képlet által ($\bar{s}$ az s út „visszafelé”). Azt állítjuk, hogy T_s izomorfizmust indukál $\pi_1(X, x)$ és $\pi_1(X, x')$ között. Az világos, hogy ha f és g homotóp $F(X, x)$-ben, akkor $T_s f$ és $T_s g$ homotóp $F(X, x')$-ban. Tehát T_s valóban egy $A_s: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, x')$ leképezést definiál. Be kell látnunk, hogy ez a leképezés izomorfizmus.

Az A_s homomorfizmus, mert

$$T_s(f) * T_s(g) = \bar{s} * f * s * \bar{s} * g * s \sim \bar{s} * f * g * s = T_s(f * g).$$

Most vegyük észre, hogy ha $s \sim s'$, akkor $A_s = A_{s'}$ és hogy $A_{s_1} \circ A_{s_2} = A_{s_1 * s_2}$, s ezért

$$\mathrm{id}_{\pi_1(X,x)} = A_{\text{ konstans } x} = A_{s * \bar{s}} = A_s \circ A_{\bar{s}}, \text{ valamint}$$

$$\mathrm{id}_{\pi_1(X,x')} = A_{\text{ konstans } x'} = A_{\bar{s} * s} = A_{\bar{s}} \circ A_s.$$

Tehát A_s valóban izomorfizmus. □

Vegyük észre, hogy a most mutatott $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, x')$ izomorfizmus függ az s út választásától.

7.1.17. tétel. *Ha $\pi_1(X,x')$ kommutatív, akkor A_s nem függ s választásától.*

Bizonyítás. Azt kell bizonyítanunk, hogy bármely két s és s_1, az x pontot x'-vel összekötő útra és bármely u, x kezdőpontú hurokra $\bar{s} * u * s \sim \bar{s_1} * u * s_1$. Ezt bizonyítják a következők:

$$\bar{s} * u * s \sim \bar{s_1} * s_1 * \bar{s} * u * s \sim \bar{s_1} * (s_1 * \bar{s}) * u * s \sim \bar{s_1} * u * (s_1 * \bar{s}) * s \sim \bar{s_1} * u * s_1.$$

□

7.2 Egyszeresen összefüggő terek

7.2.1. állítás. *Ha X útszerűen összefüggő, akkor a következők ekvivalensek:*
(1) $\pi_1(X,x) = 0$,
(2) minden hurok (kötötten) 0-homotóp,
(3) minden hurok szabadon 0-homotóp (mint $S^1 \longrightarrow X$ leképezés),
(4) Minden $S^1 = \partial D^2 \longrightarrow X$ folytonos leképezés kiterjeszthető D^2-re,
(5) bármely két út, melyek kezdő- és végpontjai megegyeznek, homotóp (végpontokon kötött homotópiával).

Bizonyítás. Az (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) következtetések nyilvánvalóak.

(3) $\Rightarrow$ (4): Legyen $f\colon S^1 \longrightarrow X$. Mivel ez szabadon 0-homotóp, így létezik $H\colon S^1 \times I \longrightarrow X$ homotópia, melyre $H_1\colon S^1 \longrightarrow X$ konstans. Legyen a D^2 körlap az r origótól mért távolsággal és a $\psi \in S^1$ x-tengelytől mért szöggel parametrizálva. Ekkor az $F\colon (r,\psi) \mapsto H(\psi, 1-r)$ leképezés D^2-ből X-be képez (felhasználva, hogy $F(0,\psi)$ független ψ-től) és kiterjesztése f-nek. Valójában az történt, hogy az $S^1 \times I$ hengerpalást felső peremét egy ponttá csíptük össze, és észrevettük, hogy a H átvezethető ezen a téren, ami viszont D^2-vel homeomorf.

(4) $\Rightarrow$ (5): Kössék össze az u és v utak az x és y pontokat. Ekkor az $u * \bar{v}$ út felfogható egy $S^1 \longrightarrow X$ leképezésnek. Ez kiterjed egy $F\colon D^2 \longrightarrow X$ függvénnyé. Azonosítsuk ezt a körlapot az $I \times I$ azon faktorterével, melyet az $(0,t) \sim (0,t'), (1,t) \sim (1,t')$ ekvivalencia definiál. Ha a faktorleképezést q-val jelöljük, akkor megfelelő parametrizációval a $F \circ q$ szolgáltatja a kívánt homotópiát.

(5) $\Rightarrow$ (2) Nyilvánvaló, hiszen a hurok is út. □

7.2.2. definíció. Ha egy tér rendelkezik az előző állítás ekvivalens tulajdonságaival, akkor *egyszeresen összefüggőnek* mondjuk.

7.2.3. feladat. Adjunk példát annak igazolására, hogy nem egyszeresen összefüggő térben a hurkok szabad és kötött homotópiája nem ekvivalens.

Az S^1 körvonal egy kitüntetett pontját hívjuk egyszerűen 1-nek (arra gondolunk, hogy $1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$). Ekkor a hurkok természetesen felfoghatók $(S^1,1) \longrightarrow (X,x_0)$ leképezéseknek fogható fel. Legyen $u\colon (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ folytonos függvény. Minden $f\colon (S^1,1) \longrightarrow (X,x_0)$ hurok egy $g\colon (S^1,1) \longrightarrow (Y,y_0)$ hurkot határoz meg a $g = u \circ f$ formula alapján.

7.2.4. állítás. *Ez az $h\colon F(X,x_0) \longrightarrow F(Y,y_0)$ leképezés egy $\pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$ homomorfizmust határoz meg.*

Bizonyítás. Meg kell mutatni, hogy homotóp f és g hurkok esetén $h(f)$ és $h(g)$ is homotóp. Ez igaz, hiszen az f és g közti homotópiát az u-val komponálva $h(f)$ és $h(g)$ közti homotópiát kapunk. A csoportművelet megmaradásának bizonyítása éppen ilyen egyszerű, ezt az olvasóra bízzuk. □

7.2.5. definíció. Az $u\colon (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ folytonos függvény által így definiált

$$\pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$$

homomorfizmust az u által *indukált homomorfizmusnak* mondjuk és u_*-gal jelöljük.

7.2.6. állítás. *Az $(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ fundamentális csoport operáció (kovariáns) funktor a pontozott terek kategóriájából a csoportok kategóriájába.* □

7.2.7. megjegyzés. A pontozott terek kategóriájának objektumai az (X, x_0) terek, morfizmusai pedig az $(X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ folytonos függvények. A fenti funktor nyilván az f morfizmust az f_*-ba viszi. A tétel állítása triviális, hiszen az
(1) $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$,
(2) és $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X)}$
állítások bizonyítása nyilvánvaló.

7.3 Fedőterek

7.3.1. definíció. A $p: (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ leképezést *fedőleképezésnek* nevezzük, ha minden $b \in B$-nek létezik egy olyan U környezete, hogy $p^{-1}(U) = \cup V_\alpha$ diszjunkt unió (V_α-k nyíltak), és minden α-ra a $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \longrightarrow U$ homeomorfizmus.

7.3.2. példa. A $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ leképezés egy fedés. Fedés továbbá az $S^1 \longrightarrow S^1$, $z \mapsto z^n$ függvény is, ahol S^1-et a komplex egységkörnek képzeljük. Ezen példákból a további $\mathbb{R} \times S^1 \xrightarrow{\phi \times 1} S^1 \times S^1$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{1 \times \phi} \mathbb{R} \times S^1$ és $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\phi \times \phi} S^1 \times S^1$ fedések készíthetők.

7.3.3. feladatok. **(a)** Keressünk $S^1 \times I \longrightarrow$ Möbius-szalag fedőleképezést.
(b) Keressünk tórusz $\longrightarrow$ Klein-kancsó fedőleképezést.

7.3.4. tétel. *Ha B összefüggő, akkor $p^{-1}(b)$ számossága minden b-re ugyanannyi.*

Bizonyítás. Legyen κ egy számosság. Jelölje B_κ azokat a $b \in B$-ket melyekre $|p^{-1}(b)| = \kappa$. A lokális trivialitásból látható, hogy minden B_κ nyílt halmaz. Ugyanakkor mindegyik zárt is, hiszen nyíltak uniójának komplementere. Tehát B összefüggősége miatt létezik egy olyan κ, melyre $B = B_\kappa$. □

Ezt a számosságot a fedés *rétegszámának* hívjuk.

7.3.5. tétel. (Fedő utak tétele) *Legyen $p: (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ fedőleképezés.*

(A) Ha u egy út B-ben, melynek kezdőpontja b_0, akkor létezik egyértelműen egy v út E-ben, melynek kezdőpontja e_0, és $p \circ v = u$ ($\Leftrightarrow$ v fedi u-t, vagy v az u felemelése).

(B) Ha v_1, v_2 közös e_0 kezdőpontú utak E-ben, és $p \circ v_1 \sim p \circ v_2$ a végpontokon kötött homotópiával, akkor v_1 és v_2 is homotóp a végpontokon kötött homotópiával.

7.3.6. megjegyzés. Speciálisan a (B) részből azt is megtudjuk, hogy v_1 és v_2 végpontja megegyezik.

Bizonyítás. (A) Tekintsük azokat a nyílt B-beli halmazokat, melyek felett a fedés triviális, vagyis azokat az $U \subset B$-ket, melyekre $p^{-1}(U) = \cup V_\alpha$ (diszjunkt unió), ahol minden V_α homeomorf U-val (nevezzük ezeket „elemi halmazoknak"). Ezek a halmazok B-nek egy nyílt fedését adják, hiszen definíció szerint minden $b \in B$-nek van egy ilyen környezete. A Lebesgue-lemma szerint létezik az I intervallumnak egy olyan t_i felosztása, melyre $u(t_i)$ és $u(t_{i+1})$-hez létezik egy mindkettőjüket tartalmazó fenti típusú U_i halmaz. Mivel ismerjük $p^{-1}(U_i)$-t minden i-re, könnyen kiterjeszthetjük folytonosan v-t $[t_i, t_{i+1}]$-re (úgy, hogy fedje $u|_{[t_i, t_{i+1}]}$-et), ha már ismerjük értékét t_i-n. Ezt megtesszük sorra a $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2], \ldots$ intervallumokra és kapunk egy a feltételeknek megfelelő v utat. Az egyértelműség a konstrukcióból adódik.

(B) A feltétel szerint létezik egy $H_t: I \longrightarrow B$ homotópia, melyre $H_0 = p \circ v_1$, $H_1 = p \circ v_2$, $H_t(0) = b_0$, $H_t(1) = c \in B$. Ismét a Lebesgue-lemmát használva kapjuk, hogy létezik az I intervallum olyan t_i és s_i felosztása, melyre a $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ téglalap H-képe minden i, j-re egy „elemi" $U_{ij} \subset B$ nyílt halmazban van. Megmutatjuk, hogy H-t fel lehet emelni egy megfelelő G, most már E-beli homotópiává, vagyis létezik egy $G: I \times I \longrightarrow E$ homotópia, melyre $p \circ G = H$ és $G_0(0) = e_0$. Ezt először a $[0, t_1] \times [0, s_1]$ téglalapra tesszük meg az „elemi" tulajdonság segítségével, majd $[t_1, t_2] \times [0, s_1]$-re, s így tovább, majd ha ezt a $[0, 1] \times [0, s_1]$ sávot befejeztük, ugyanígy megtesszük a következő $[0, 1] \times [s_j, s_{j+1}]$ sávokkal $j = 1, 2, \ldots$. Végül megkapjuk a kívánt tulajdonságú G homotópiát v_1 és v_2 között. □

7.3.7. megjegyzés. E bizonyításokban a **??**-ban megfogalmazott Lebesgue-lemmánál erősebb „Lebesgue-lemmát" használtunk. Ugyanis nem csak azt használtuk ki, hogy bármely elég közeli $x, y \in Q$ pontra $f(x), f(y) \in U_\alpha$ (jelöléseket ld. 7.1.14 lemma), hanem, hogy minden Q-ban lévő elég kicsi sugarú gömb része egy alkalmas U_α-nak. Feladat: bizonyítsuk be ezt az erősebb lemmát.

7.3.8. következmény. *Ha $(E, e_0) \xrightarrow{p} (B, b_0)$ fedés, akkor $p_*: \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$ monomorfizmus.*

Bizonyítás. Egy e_0 kezdőpontú E-beli f hurok képe p-nél legyen b_0 kezdőpontú g hurok. Mivel g 0-homotóp, ezért g felemelése és a konstans b_0 függvény e_0 kezdőpontú felemelése E-ben homotóp. Viszont a felemelés egyértelműsége miatt ez a két E-beli hurok csak f és a konstans e_0 hurok lehet. Tehát f is 0-homotóp. □

7.3.9. feladat. Lássuk be, hogy a $(\pi_1(B, b_0) : Im(p_*))$ index megegyezik a fedés rétegszámával.

7.3.10. tétel. $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Bizonyítás. Tekintsük a $\psi: (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (S^1, 1)$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ fedést. (Az előző feladat szerint azt már tudjuk, hogy $\pi_1(S^1)$ megszámlálható.) Tekintsünk egy $u \in F(S^1, 1)$ hurkot. Ennek a fenti tétel szerint létezik egyértelmű v felemeltje $\mathbb{R}$-be. Nyilván $v(1) = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. A 7.3.5 tétel (B) része szerint azt is tudjuk, hogy egy u-val homotóp hurok felemeltje homotóp v-vel, így speciálisan végpontja megegyezik v végpontjával. Tehát a fenti n egész szám az u homotópiaosztályára jellemző, vagyis kaptunk egy

$$\phi: \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z},\ [u] \mapsto n$$

leképezést. Ez a leképezés szürjektív, ezt mutatja az $u_n(t) = (\cos 2n\pi t, \sin 2n\pi t)$ hurok, melyre $\phi([u_n]) = n$. A fedő utak tétele miatt ϕ injektív. Azt kell csak belátnunk, hogy homomorfizmus. Ez pedig következik abból, hogy $u_n * u_m \sim u_{n+m}$. Ugyanis (a homotópia direkt megmutatása helyett) látható, hogy u_n felemeltje $2\pi n$-ben végződik, u_m $2\pi n$ kezdőpontú felemeltje $2\pi n + 2\pi m$-ben végződik, míg u_{n+m} felemeltje $2\pi(n+m)$-ben végződik. Ezzel állításunkat beláttuk. □

7.3.11. következmény. (Borsuk-tétel) *Nem létezik olyan folytonos $D^2 \longrightarrow \partial D^2 (= S^1)$ függvény, melyre $f|_{\partial D^2} = \mathrm{id}_{\partial D^2}$.*

Bizonyítás. Ha lenne ilyen f függvény, akkor az

$$S^1 \subset D^2 \xrightarrow{f} S^1$$

kompozíció az identitás lenne, de akkor a fundamentális csoportokon a

$$\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2, 1) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1, 1)$$

kompozíció is a $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ identitás lenne. Ez viszont lehetetlen, hiszen $\pi_1(D^2, 1) = 0$. □

7.3.12. tétel. $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$, *ha $n > 1$.*

Bizonyítás. Az állítás következik abból, hogy a $p: (S^n, x) \longrightarrow (\mathbb{RP}^n, \pm x)$, $x \mapsto (x, -x)$ leképezés 2-rétű fedés. Emiatt ugyanis (mivel tudjuk, hogy $\pi_1(S^n) = 0$ $n > 1$-re) $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ elemszáma 2, és $\mathbb{Z}_2$ az egyetlen 2-rendű csoport.

Vizsgáljuk meg mégis ezt a p fedést. Legyen u egy hurok $(\mathbb{RP}^n, \pm x)$-ben. Ekkor ennek a v felemeltjének $v(1)$ végpontja vagy x vagy $-x$. Ha x, akkor v 0-homotóp S^n-ben, s a homotópiát p-vel komponálva kapjuk, hogy u is 0-homotóp $\mathbb{RP}^n$-ben. Ha viszont $v(1) = -x$, akkor u nem 0-homotóp, hiszen ezesetben a homotópia felemeltje v-t is 0-homotóppá tenné, ami már csak azért sem lehet, mert kezdő- és végpontja különböző. □

7.3.13. megjegyzés. A utóbbi két tételben használt módszer gyakran használható bizonyos terek fundamentális csoportjának kiszámolására. Az általános elmélet lényege a következő. A p fedés egy fedőtranszformációjának mondunk egy $f: E \longrightarrow E$ homeomorfizmust, ha $p \circ f = p$ (nem kötjük ki, hogy e_0 fixen maradjon). A fedőtranszformációk $FT(p)$ csoportot alkotnak a kompozíció műveletére. Igaz a következő azonosság:

$$FT(p) \cong N_{\pi_1(B,b_0)}(p_*\pi_1(E,e_0)) \;/\; p_*\pi_1(E,e_0),$$

ahol N (szokásos módon) a normalizátort jelent. A fenti két tételben olyan fedést mutattunk, melyre $\pi_1(E,e_0) = 0$; ezt *univerzális fedésnek* hívjuk. Ilyenkor a fenti izomorfizmus azt jelenti, hogy $FT(p) \cong \pi_1(B,b_0)$.

7.4 Szorzat fundamentális csoportja

Továbbra is él az a megállapodásunk, mely szerint a fundamentális csoportot additív csoportnak írjuk.

7.4.1. tétel. $\pi_1(X \times Y,(x,y)) \cong \pi_1(X,x) \oplus \pi_1(Y,y)$.

Bizonyítás. Legyen u egy $X \times Y$-beli hurok (x,y) kezdőponttal, és ennek vetületét X-be illetve Y-ba jelöljük $u_x = pr_1 \circ u$-val illetve $u_y = pr_2 \circ u$-val. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $u \mapsto (u_x, u_y)$ leképezés átvihető egy, a fundamentális csoportok közti $[u] \mapsto ([u_x],[u_y])$ leképezésbe, hiszen a megfelelő homotópia vetülete szintén homotópia lesz X-ben és Y-ban. Annak egyszerű belátását, hogy ez a függvény bijektív homomorfizmus, az olvasóra bízzuk. □

7.4.2. példa. A tórusz fundamentális csoportja tehát $\pi_1(S^1 \times S^1) = \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Ez utóbbi példa bizonyítja, hogy S^2 (melynek fundamentális csoportja 0) nem homoeomorf $S^1 \times S^1$-gyel. Ennél valójában több is igaz: nem létezik köztük lokális homeomorfizmus sem.

7.4.3. definíció. Egy $f: X \longrightarrow Y$ függvényt *lokális homeomorfizmusnak* nevezünk, ha f szürjektív és minden $x \in X$-nek létezik olyan U környezete, melyre $f|_U: U \longrightarrow f(U)$ homeomorfizmus.

7.4.4. állítás. *Nem létezik $S^1 \times S^1 \longrightarrow S^2$ lokális homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f ilyen lokális homeomorfizmus. Először azt állítjuk, hogy egy $p \in S^2$ pont őspéke véges halmaz. Ugyanis, ha végtelen lenne, akkor $S^1 \times S^1$ kompaktsága miatt létezne q torlódási pontja. Ekkor viszont nem létezik $q \in S^1 \times S^1$-nek olyan környezete, melynek képe csak egyszer fedi le p-t, s így f nem lokális homeomorfizmus. Jelöljük $q_1, \ldots, q_k$-val p ősképeit. Mivel f lokális homeomorfizmus, így ezeknek léteznek U_i környezeteik, melyekre $f|_{U_i}$ homeomorfizmus a képre. Ekkor $V_p = \cap_i f(U_i)$ környezet megfelel ,,elemi" környezetnek, tehát f fedés.

Ebből az következik, hogy $f_*: \pi_1(S^1 \times S^1, P) \longrightarrow \pi_1(S^2, Q)$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ homomorfizmus injektív. Ez pedig ellentmondás. □

7.4.5. megjegyzés. A másik irányban $S^2 \longrightarrow S^1 \times S^1$ sincs lokális homeomorfizmus. Ugyanis, csakúgy, mint az előző bizonyításban, ha lenne, akkor az fedés lenne, melynek rétegszáma véges. A $|\pi_1(S^1 \times S^1) : p_*\pi_1(S^2)|$ index viszont végtelen, így ellentmondást kapunk.

7.4.6. tétel. $\mathbb{R}^p \not\cong \mathbb{R}^q$*, ha* $p \neq q$.

Bizonyítás. A tételt csak $p = 1, 2$ értékekre bizonyítjuk most, a többire később visszatérünk (lásd **??**).

$p = 1$. Az $\mathbb{R}^1$-ből egy pontot elhagyva nem összefüggő teret kapunk. Míg bármely nagyobb q-ra $\mathbb{R}^q - \{p\}$ összefüggő. Tehát nem lehetnek homeomorfak.

$p = 2$. Látható, hogy $\pi_1(\mathbb{R}^2 - 0, P) \cong \pi_1(S^1 \times \text{nyílt félegyenes}) \cong \pi_1(S^1 \times \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$, míg

$$\pi_1(\mathbb{R}^q - 0, Q) \cong \pi_1(S^{q-1} \times \mathbb{R}) \cong 0, \text{ amint } q \geq 3.$$

(A fundamentális csoport kezdőpontját nem írtuk ki, hiszen összefüggő terekről van szó.) □

7.4.7. feladat. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^2$ egyetlen nyílt részhalmaza sem lehet homeomorf egyetlen $\mathbb{R}^q$-val sem $q \neq 2$-re.

7.5 Homotopikus ekvivalencia

7.5.1. definíció. Az $f: X \longrightarrow Y$ leképezést *homotopikus ekvivalenciának* nevezzük, ha létezik $g: Y \longrightarrow X$ függvény, melyre $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ és $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$. Az X és Y tér *homotopikusan ekvivalensek*, ha létezik köztük homotopikus ekvivalencia. (Nyilvánvaló, hogy a „homotopikusan ekvivalensnek lenni" ekvivalenciatulajdonság.)

7.5.2. állítás. *Homotopikusan ekvivalens terek fundamentális csoportja izomorf.*

Bizonyítás. Mivel (a definíció jelöléseit használva) $f_* \circ g_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y)}$ és $g_* \circ f_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X)}$, így az állítás nyilvánvaló. □

7.5.3. példa. $\mathbb{R}^n$ homotopikusan ekvivalens az egypontú térrel. $\mathbb{R}^n - 0$ homotopikusan ekvivalens S^{n-1}-gyel.

7.5.4. definíció. Az $A \subset X$ altér *retraktuma* X-nek, ha létezik $f: X \longrightarrow A$ leképezés, melyre $f|_A = \mathrm{id}_A$. Ekkor f-et *retrakciónak* nevezzük. Az $i: A \subset X$ altér *deformációs retraktuma* X-nek, ha létezik $f: X \longrightarrow A$ retrakció, melyre $i \circ f \sim \mathrm{id}_X$ és $f \circ i \sim \mathrm{id}_A$.

7.5.5. példa. $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n - 0$ deformációs retraktum. $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ deformációs retraktuma $\mathbb{R}^2$-nek.

Vegyük észre, hogy a Borsuk-tétel azt mondta ki, hogy ∂D^2 nem retraktuma D^2-nek.

7.5.6. tétel. *A Möbius szalagnak nem retraktuma a pereme.*

Bizonyítás. Hívjuk a Möbius-szalagot M-nek. Feladat: M középvonala deformációs retraktuma M-nek. Ebből következik, hogy $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$. Ezenkívül M pereme, mint beágyazott S^1, ± 2-t reprezentál $\pi_1(M)$-ben.

Ha létezne $f: M \longrightarrow \partial M$ retrakció, akkor a fundamentális csoportokon a

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\partial M) & \longrightarrow & \pi_1(M) & \longrightarrow & \pi_1(\partial M) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

kompozíció az identitás lenne, ez viszont lehetetlen. □

8. fejezet

Topologikus csoportok

8.1 Topologikus csoportok

8.1.1. definíció. A G halmaz *topologikus csoport*, ha G topologikus tér, csoport és a csoportműveletek (vagyis a $G \times G \longrightarrow G, (x,y) \mapsto xy$; szorzás és a $G \longrightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ inverz képzés) folytonosak.

8.1.2. megjegyzés. A csoportműveletek folytonossága helyett elég feltenni a látszólag gyengébb, de valójában ekvivalens feltételt, miszerint az $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ leképezés folytonos.

8.1.3. állítás. *Ha egy topologikus csoport T_1-tér, akkor T_2-tér is.*

Bizonyítás. Ha G T_1-tér, akkor az egyelemű halmazok zártak, tehát $\{1\}$ zárt. Ennek őseképe az $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ függvénynél pontosan a $\{(g,g) \mid g \in G\}$ átló. Mivel az átló zárt, így G T_2-tér. □

8.1.4. állítás. *Egy G topologikus csoportban az egységelem összefüggő komponense normálosztó.*

Bizonyítás. Legyen N ez az összefüggő komponens. Vegyük észre, hogy minden $g \in G$-re $gN, Ng, g^{-1}Ng$ összefüggő. Ebből következik, hogy $N \cup g^{-1}Ng$ is összefüggő halmaz (az egységelem benne van a metszetben). Tehát $g^{-1}Ng \subset N$. Már csak azt kell bizonyítani, hogy részcsoport. Legyen $x \in N$. Ekkor az $x^{-1}N$ összefüggő és tartalmazza az egységelemet, így része N-nek. Viszont tartalmazza x^{-1}-et is, tehát $x^{-1} \in N$. A szorzás zártságára vonatkozó feltétel bizonyítása hasonló. □

8.1.5. megjegyzés. A fentiekből az is következik, hogy G összefüggőségi komponensei előállnak, mint N jobb- (bal-)oldali mellékosztályai. Tehát a következő sorozat egzakt:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow G/N \longrightarrow 0.$$

Itt az N és a G topológikus csoportok és a G/N-hez természetesen rendelt topológia a diszkrét topológia (mely ezesetben a faktortopológiával egyezik meg).

8.1.6. példa. $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Z},+)$ topologikus csoportok, az előbbi az euklideszi, az utóbbi a diszkrét topológiával. Szintén topologikus csoport az S^1, melyen a csoportstruktúra az $S^1 \subset \mathbb{C}$-ből adódó komplex szorzás.

8.1.7. példa. A következő topologikus csoportok gyakran használatosak:
$GL_n(\mathbb{R}):$ $n \times n$-es nem-szinguláris valós mátrixok halmaza.
$GL_n^+(\mathbb{R}):$ $n \times n$-es pozitív determinánsú mátrixok halmaza.
$SL_n(\mathbb{R}):$ $n \times n$-es 1 determinánsú mátrixok halmaza.
$O(n):$ $n \times n$-es ortogonális mátrixok halmaza.
$SO(n):$ $n \times n$-es speciális ortogonális mátrixok halmaza.

Ezeken a halmazokon a csoportműveleten a szorzást értjük, míg a topológiát a mindegyiket tartalmazó $\mathbb{R}^{n^2}$ tér euklideszi topológiájából öröklik.

8.1.8. megjegyzés. Az S^3 gömbfelületen is megadható topologikus csoport struktúra, méghozzá a kvaterniószorzás által, hiszen:

$$S^3 = \{x + yi + zj + vk \mid x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 1\}.$$

8.1.9. feladatok. **(a)** Mutassuk meg, hogy topologikus csoportban egy részcsoport (normálosztó) lezárása is részcsoport (normálosztó).
(b) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$ minden részcsoportja vagy diszkrét topológikus tér (s ilyenkor, mint csoport $\cong \mathbb{Z}$), vagy mindenhol sűrű.
(c) Mutassuk meg, hogy $SO(2) \cong S^1$. (Izomorfizmuson itt topologikus csoportok közti izomorfizmust értünk, vagyis olyan homeomorfizmust, mely csoportizomorfizmus.)
(d) Mutassuk meg, hogy $SO(4)$ homeomorf $S^3 \times SO(3)$-mal. Igaz-e, hogy e két topologikus csoport izomorf (lásd az előző feladat)?

II

Második félév

9. fejezet

A fundamentális csoport kiszámítása

9.1 Van Kampen tétele

Legyen $X = X_1 \cup X_2$ ahol X, X_1, X_2 útösszefüggő terek, X_1, X_2 nyílt alterek X-ben és $X_1 \cap X_2$ útösszefüggő. Ekkor X fundamentális csoportja a következőképpen számolható ki az X_1, X_2, $X_1 \cap X_2$ fundamentális csoportjainak és az $i_1: X_1 \cap X_2 \subset X_1$ illetve $i_2: X_1 \cap X_2 \subset X_2$ beágyazások által indukált homomorfizmusoknak a segítségével (a kezdőpont minden esetben egy rögzített $x_0 \in X_1 \cap X_2$ pont): Tekintsük $\pi_1(X_1)$ egy prezentációját, legyen tehát G_1 a generátorok, R_1 pedig a relációk halmaza. Hasonlóan legyen G_2 a generátorok, R_2 a relációk halmaza $\pi_1(X_2)$ egy prezentációjában. (Tegyük fel azt is, hogy $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.)

9.1.1. tétel. (Van Kampen tétele) *A $\pi_1(X)$ fundamentális csoport egy prezentációját adja a $G = G_1 \cup G_2$ generátor-halmaz és a $R = R_1 \cup R_2 \cup R_{12}$ relációk, ahol $R_{12} = \{i_{1*}(\alpha) = i_{2*}(\alpha) \mid \forall \alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2)\}$.*

Bizonyítás. Lássuk be először, hogy G generátorrendszer. Legyen tehát $u: [0,1] \to X$ egy tetszőleges hurok x_0 kezdőponttal. A Lebesgue lemmát az u folytonos leképezésre és az $X = X_1 \cup X_2$ nyílt fedésre alkalmazva azt kapjuk, hogy létezik a $[0,1]$ szakasznak olyan $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ felosztása, hogy minden i-re $(0 < i \leq n)$ vagy $u([t_{i-1}, t_i]) \subset X_1$ vagy $u([t_{i-1}, t_i]) \subset X_2$. Kössünk össze minden $u(t_i)$ pontot a rögzített $x_0 \in X_1 \cap X_2$ ponttal egy s_i út segítségével a következőképpen:
(i) Ha $u(t_i) = x_0$, akkor legyen s_i a konstans x_0 út.
(ii) Ha $u(t_i) \in X_1 \cap X_2$, akkor az s_i út haladjon $X_1 \cap X_2$-ben.
(iii) Ha $u(t_i) \in X_1$, akkor az s_i út haladjon X_1-ben.
(iiii) Ha $u(t_i) \in X_2$, akkor az s_i út haladjon X_2-ben.
Legyen $u_i = u|[t_{i-1}, t_i]$ és legyen $\tilde{u}_i = s_{i-1} u_i \bar{s}_i$ valamint $\tilde{u} = \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \ldots \tilde{u}_n$. Nem nehéz belátni, hogy u és $\tilde{u}$ homotópok, másrészt minden $\tilde{u}_i$ képe benne van vagy X_1-ben vagy X_2-ben és ezért a homotópiaosztálya előáll vagy egy G_1 elemeiből álló szóként, vagy egy G_2 elemeiből álló szóként. Evvel tehát megkaptuk, hogy G generálja a $\pi_1(X)$ csoportot.

A következő lépés annak belátása lesz, hogy R elemei valóban relációk. Ha két szó ugyanazt a homotópiaosztályt adja $\pi_1(X_1)$-ben, akkor $\pi_1(X)$-ben is ugyanazt kell adniuk. Ezért az R_1 relációk mind teljesülnek $\pi_1(X)$-ben. Hasonló teljesül az R_2 relációkra is. Egy $X_1 \cap X_2$-beli hurok homotópiaosztályát felírva G_1 elemeiből álló szóként (mint egy X_1-beli hurokosztályt) ill. egy G_2 elemeiből álló szóként (mint egy X_2-beli hurokosztályt) e kettőnek $\pi_1(X)$-ben ugyanazt az elemet kell definiálnia. Következésképp az R_{12} relációk is teljesülnek, vagyis R elemei relációk lesznek $\pi_1(X)$-ben.

Végül azt kell megmutatnunk, hogy minden $\pi_1(X)$-beli reláció következik az $R = R_1 \cup R_2 \cup R_{12}$ relációkból. Némileg pontatlanul fogalmazva a következő állítás belátása lesz a bizonyítás lényege: Ha u egy X-beli (x_0 kezdőpontú) hurok és létezik egy X-beli (végpontokban rögzített) homotópia, mely összeköti u-t a konstans x_0 hurokkal, akkor létezik olyan, e két hurkot összekötő homotópia is, mely előáll olyan homotópiák egymásutáni alkalmazásaként, melyek során vagy
(a) a hurok egy X_1-beli részét vetjük alá egy X_1-beli (végpontokban rögzített) homotópiának, vagy

(b) a hurok egy X_2-beli részét vetjük alá egy X_2-beli (végpontokban rögzített) homotópiának, vagy
(c) a hurok egy $X_1 \cap X_2$-beli részét eddig X_1-ben tekintettük, és most ezt X_2-beli hurokként írjuk fel.
Legyenek tehát $F(G)$, $F(G_1)$ és $F(G_2)$ a G, G_1 ill. G_2 ábécék által generált szabad csoportok, $\theta_1 : F(G_1) \to \pi_1(X_1)$ ill. $\theta_2 : F(G_2) \to \pi_1(X_2)$ pedig a megfelelő epimorfizmusok. Ezek természetes módon egy $\theta : F(G) \to \pi_1(X)$ homomorfizmust definiálnak, melyről fentebb beláttuk, hogy epimorfizmus. Minthogy $F(G) = F(G_1) * F(G_2)$, a θ homomorfizmus a $\theta = (i_{1*} \circ \theta_1) * (i_{2*} \circ \theta_2)$ formulával definiálható. Legyen tehát w egy olyan G-beli betűkkel felírt szó, mely $\pi_1(X)$-ben a triviális elemet reprezentálja — azaz $w \in F(G)$ és $\theta(w) = 1$. Azt kell belátnunk, hogy w benne van az R relációk, mint $F(G)$-beli elemek által generált normálosztóban. A G_1-beli betűk mindegyikéhez válasszunk egy X_1-beli hurkot az adott homotópiaosztályból. (Azaz minden $g_1 \in G_1$ betűhöz választunk egy, a $\theta_1(g_1) \in \pi_1(X_1)$ homotópiaosztályt reprezentáló X_1-beli hurkot). Hasonlóan tegyük ezt meg a G_2-beli betűkhöz (azokhoz persze X_2-ben választunk őket reprezentáló hurkot). Képezzük a most kiválasztott hurkok szorzatát a w szónak megfelelő módon. (Vagyis először vesszük a w-t alkotó első betűnek megfelelő hurkot, majd a második betűnek megfelelőt stb. és képezzük e hurkok szorzatát.) Eredményül egy olyan X-beli hurkot kapunk, mely X_1 és X_2-beli hurkok szorzataként áll elő. Jelöljük ezt a szorzatot $u = u_1 u_2 \ldots u_k$-vel (itt tehát $u_i \in \Omega(X_1)$ vagy $\Omega(X_2)$). A feltétel szerint u null-homotóp. Legyen H az u-t a konstans hurokkal összekötő homotópia. (Azaz H megszorítása a négyzet felső vízszintes oldalára u, a többi oldalon pedig konstans x_0.) Alkalmazzuk ismét a Lebesgue lemmát, most a $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ leképezésre és az $X = X_1 \cup X_2$ nyílt fedésre. Eszerint a $[0,1] \times [0,1]$ egységnégyzetnek létezik egy olyan finom felosztása, hogy minden egyes kis négyzet H menti képe X_1-ben vagy X_2-ben van. (A felosztás során megtartjuk az $u = u_1 u_2 \ldots u_k$ felbontásból származó osztópontokat is.) Minden p osztópont képét egy alkalmas s_p út mentén az x_0 kezdőponttal kössük össze, vagyis tekintsünk olyan $s_p : [0,1] \to X$ leképezéseket, melyekre ($s_p(0) = x_0$, $s_p(1) = H(p)$) és (a korábbihoz hasonlóan):
(i) Ha $H(p) = x_0$, akkor s_p a konstans x_0 út,
(ii) ha $H(p) \in X_1 \cap X_2$, akkor s_p képe $\subset X_1 \cap X_2$,
(iii) ha $H(p) \in X_1$, akkor s_p képe $\subset X_1$,
(iiii) ha $H(p) \in X_2$, akkor s_p képe $\subset X_2$.
Ekkor bármely két szomszédos rácspontot összekötő szakasz egy X-beli hurkot reprezentál: ha pq a két rácspont meghatározta szakasz, akkor a neki megfelelő hurkot az $s_p \cdot (H|\overline{pq}) \cdot \bar{s}_q$ szorzat adja meg (ez nyilván átparaméterezhető $[0,1]$-re). Minden ilyen hurok vagy X_1-beli vagy X_2-beli. Ezért minden ilyen hurokhoz kiválasztható (nem egyértelműen) egy $F(G_1)$-beli vagy egy $F(G_2)$-beli szó (melynek képe θ_1-nél vagy θ_2-nél épp az adott hurok homotópiaosztálya), illetve ha a hurok a metszetben van, akkor mindkét szabad csoportból egy-egy szó — melyek definíció szerint R_{12}-ekvivalensek. (E szavak kiválasztása során megtehetjük azt, hogy a konstans hurokhoz a triviális szót választjuk.) Így speciálisan az u hurok, mely eddig a H-nak a négyzet felső vízszintes oldalára való megszorítása volt, most kicserélhető a felső négyzetoldal felbontásához tartozó hurkok szorzatára. Ezek mindegyike X_1-beli vagy X_2-beli hurok, így az ő $\pi_1(X_1)$ illetve $\pi_1(X_2)$-beli homotópiaosztályait G_1 illetve G_2 betűivel felírva egy $F(G)$-beli $\tilde{w}$ szót kapunk. Bár ezen új szó nincs w által egyértelműen meghatározva, de w-től el lehet jutni $\tilde{w}$-hoz R_1-beli és R_2 beli relációk alkalmazásával. (Ugyanis minden alkalommal vagy egy X_1-be vagy egy X_2-be eső hurokrész X_1-beli illetve X_2-beli homotópiaosztályának tekintettük $F(G_1)$-ben illetve $F(G_2)$-ben egy más felírását.) Most tehát elég belátni azt, hogy a kapott $\tilde{w}$ szó R-beli relációk alkalmazásával a triviális szóra redukálható. A H leképezés bal felső kis négyzet bal függőleges és felső vízszintes oldalára való megszorítását cseréljük ki e kis négyzet másik két oldalára vett megszorításra. Ha e kis négyzet H-nál vett képe X_1-beli, akkor a kapott új hurokhoz tartozó szó R_1-ekvivalens lesz $F(G)$-ben az eredeti hurokhoz tartozó szóval. Hasonlóan ha e kis négyzet képe X_2-ben van, akkor a kapott új szó R_2-ekvivalens az eredetivel. Ha a következő kis négyzet ugyanazon X_i-be képződik H által, akkor ugyanezt az eljárást ismételjük meg. Ha a másik X_i-be megy, akkor közbe kell iktatnunk egy R_{12} ekvivalenciát (midőn az eddig pl. X_1-ben felírt $X_1 \cap X_2$-beli hurokosztályt most X_2-ben írjuk fel, vagy fordítva). Az eljárást folytatva végül R-beli ekvivalenciákon át eljutunk a triviális szóig — ugyanis végül a H-nak az alsó vízszintes oldalra vett megszorításához jutunk, ez pedig a konstans hurok. Evvel pedig beláttuk, hogy $\pi_1(X) = \langle G \mid R \rangle$, vagyis a tétel bizonyítása kész. □

9.2 Alkalmazások

A Van Kampen tétel első alkalmazásaként belátjuk, hogy minden végesen prezentált csoport előáll mint valamilyen topologikus tér fundamentális csoportja (9.2.7 állítás). Előbb azonban egy kis előkészítésre van szükségünk.

9.2.1. definíció. Legyen (X, x_0) és (Y, y_0) két pontozott tér. (Pontozott téren egy olyan topologikus teret értünk, melynek egy pontja ki van jelölve, esetünkben ez az x_0 illetve y_0.) Ezen terek *csokrán* vagy *wedge szorzatán* azt a (pontozott) teret értjük, melyet az $X \cup Y$ diszjunkt unióból kapunk az x_0 és az y_0 pontok azonosításával. (A kiválasztott pont az egymással azonosított két kiválasztott pont lesz.) (X, x_0) és (Y, y_0) csokrát $X \vee Y$ jelöli.

9.2.2. lemma. *Tegyük fel, hogy az (X, x_0) és (Y, y_0) pontozott terekben a kiválasztott x_0 illetve y_0 pontoknak létezik olyan U_{x_0} illetve V_{y_0} környezetük, melyeknek a kiválasztott pontok szigorú deformációs retraktumuk.* [1] *Ekkor $\pi_1(X \vee Y)$ a $\pi_1(X, x_0)$ és $\pi_1(Y, y_0)$ csoportok szabad szorzatával izomorf.*

Bizonyítás. Fedjük le $X \vee Y$-t az $X \cup V_{y_0}$ és $Y \cup U_{x_0}$ nyílt halmazokkal, s alkalmazzuk a Van Kampen tételt. (Vegyük észre, hogy a két nyílt halmaz metszete pontrahúzható, ezért fundamentális csoportja triviális, így R_{12} típusú relációk nem lesznek.) □

9.2.3. következmény. *n darab körvonal csokra (vagyis egy pontban összeragasztott n darab körvonal) fundamentális csoportja az n elem által generált F_n szabad csoporttal izomorf.*

Bizonyítás. Alkalmazzunk n szerinti indukciót. $n = 1$-re az állítás ismert (**??** ???). Az indukciós lépés pedig éppen az előző lemmából következik. □

9.2.4. lemma. *Legyen X rögzített topologikus tér, a $\varphi: \partial D^2 \to X$ folytonos leképezés homotópiaosztályát $\pi_1(X)$-ben jelölje $[\varphi]$. Tekintsük az $Y = X \cup_\varphi D^2$ teret. (Y tehát az $X \cup D^2$ diszjunkt unióból úgy áll elő, hogy minden $q \in \partial D^2$ pontot azonosítunk $\varphi(q) \in X$ képével. Azt mondjuk, hogy az Y-t az X-ből úgy nyertük, hogy a D^2 körlapot odaragasztottuk X-hez a φ leképezés segítségével.) Ekkor $\pi_1(Y) = \pi_1(X)/\{[\varphi]\}$, ahol $\{[\varphi]\}$ a φ által generált normálosztó $\pi_1(X)$-ben.*

(A fentiekben ki nem mondottan feltételezzük, hogy a kezdőpont mindkét térben a $\varphi(1)$ pont, ahol $1 \in \partial D^2 = S^1$, és S^1 jelöli az egységnyi abszolútértékü komplex számok terét.) A lemma bizonyításához az alábbi definícióra lesz szükségünk.

9.2.5. definíció. Legyen $f: A \to B$ folytonos leképezés. A $C(f)$ (vagy $Cyl(f)$) teret — melyet f *hengerének* nevezünk — úgy kapjuk meg, hogy az $(A \times [0,1]) \cup B$ diszjunkt unióban minden $(a, 1) \in A \times [0,1]$ pontot $f(a) \in B$-vel azonosítunk.

9.2.6. megjegyzés. A homotópiaelméletben "minden leképezés beágyazás". Ezen a — nem véletlenül idézőjelbe tett — "kijelentésen" a következőket kell érteni: Tetszőleges $f: A \to B$ leképezés esetén
(1) $Cyl(f)$ tartalmazza az B teret és a $\beta: B \subset Cyl(f)$ beágyazás homotópikus ekvivalencia.
(2) A is természetes módon része $Cyl(f)$-nek, ennek beágyazását jelöljük α-val.
(3) A $\beta \circ f$ leképezés homotóp α-val.

Ezért homotópiaelméleti szempontból az f leképezés az α beágyazásra cserélhető.

Bizonyítás (9.2.4 lemmáé). Az Y tér homeomorf a $C(\varphi) \cup_{\mathrm{id}_{S^1}} D^2$ térrel. Alkalmazzuk a Van Kampen tételt a következő szereposztással: $X_1 = C(\varphi) \setminus S^1$ és $X_2 = (C(\varphi) \setminus X) \cup D^2$. Ekkor $Y = X_1 \cup X_2$, X_2 homeomorf a nyílt körlappal, X_1 homotopikusan ekvivalens az X térrel, és $X_1 \cap X_2$ pedig homeomorf az $X_1 \cap X_2 = S^1 \times (0,1)$ nyílt hengerrel. Ilymódon tehát a lemma bizonyítása a Van Kampen tételből könnyen következik. □

[1] Azaz, e környezetek identikus leképezése homotóp a konstans $U_{x_0} \to x_0$, illetve $V_{y_0} \to y_0$ leképezésekkel és a homotópia fixen tartja az x_0 illetve y_0 pontot.

9.2.7. állítás. *Minden végesen prezentált csoport előáll mint egy topologikus tér fundamentális csoportja.*

Bizonyítás. Vegyünk egy G csoportot és rögzítsük egy véges prezentációját. Minden generátornak feleltessünk meg egy S^1 körvonalat, majd vegyük ezek csokrát. A relációknak megfelelő leképezésekkel a csokorhoz körlapokat ragasztva (a 9.2.4 lemma szerint) éppen egy megfelelő teret kapunk. □

9.2.8. példa. Legyen $\varphi: S^1 \to S^1$ a $z \to z^k$ leképezés ($k \in \mathbb{Z}$). Ekkor az $Y = S^1 \cup_\varphi D^2$ tér fundamentális csoportja $\mathbb{Z}_{|k|}$-val, vagyis a $|k|$ elemű ciklikus csoporttal izomorf. Speciálisan $k = 2$ esetén $Y = \mathbb{RP}^2$ a projektív sík. Így egy újabb bizonyítást nyertünk a $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \approx \mathbb{Z}_2$ izomorfizmusra.

Ahhoz, hogy ezen az úton minden n-re beláthassuk a $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \approx \mathbb{Z}_2$ izomorfizmust, szükségünk lesz — a későbbiekben is igen hasznos — alábbi lemmára, mely azt írja le, hogy mi történik a fundamentális csoporttal akkor, ha nem 2-dimenziós körlapot, hanem magasabb dimenziós golyót ragasztunk a térhez. (A válasz: semmi, vagyis a fundamentális csoport nem változik.)

9.2.9. lemma. *Legyen X topologikus tér, $\varphi: \partial D^n \to X$ folytonos leképezés, és tegyük fel, hogy $n \geq 3$. Tekintsük az $Y = X \cup_\varphi D^n$ teret. Ekkor $\pi_1(Y) = \pi_1(X)$.*

Bizonyítás. A bizonyítás ugyanúgy megy, mint a 9.2.4 lemma esetében; vegyük észre, hogy most (az $n \geq 3$ feltétel miatt) nemcsak az X_2 térnek de az $X_1 \cap X_2 = S^{n-1} \times (0,1)$ metszetnek is triviális a fundamentális csoportja. □

9.2.10. lemma. *Legyen $p: S^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ a standard kétrétű fedés. Ekkor $\mathbb{RP}^n = \mathbb{RP}^{n-1} \cup_p D^n$.*

Bizonyítás. A projektív tér definíciója szerint D^n peremén az átellenes pontokat azonosítva kapjuk meg $\mathbb{RP}^n$-t. Ezen faktorizáció során a $\partial D^n = S^{n-1}$ térből az $\mathbb{RP}^{n-1}$ teret kapjuk. Tehát valóban, D^n peremének pontjait p-nél vett $\mathbb{RP}^{n-1}$-beli képükkel azonosítva $\mathbb{RP}^n$-t kapjuk. □

A fenti két lemma a $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \approx \mathbb{Z}_2$ izomorfizmust implikálja $n \geq 2$ esetén.

9.3 Magasabb dimenziós homotopikus csoportok

A fundamentális csoport fogalmát általánosítva — vagyis $S^1 \to X$ leképezések helyett $S^n \to X$ leképezéseket vizsgálva — a $\pi_n(X, x_0)$ n-dimenziós homotopikus csoprotot kapjuk:

9.3.1. definíció. Jelölje I^n az n-dimenziós kockát, ∂I^n pedig legyen ennek pereme. Legyen továbbá (X, x_0) egy pontozott tér. Egy $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ folytonos leképezést Az X egy n dimenziós *szferoidjának* nevezünk. (Feltesszük tehát, hogy a leképezés során a ∂I^n perem az x_0 pontba képződik.) Az összes n-dimenziós szferoidok halmazát jelöljük $\Omega^n(X, x_0)$-lal. $\Omega^n(X, x_0)$ elemei között (peremen kötött) homotópia értelmezhető, melyről egyszerűen belátható, hogy ekvivalenciarelációt ad. A homotópiaosztályok halmazát jelöljük $\pi_n(X, x_0)$-lal. A $\pi_n(X, x_0)$ halmazon csoportstruktúrát a következő módon adhatunk meg: I^n koordinátáit jelölje $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ és legyen u, v két n-szferoid. Ekkor az

$$(u + v)(t_1, \ldots t_n) = u(2t_1, t_2, \ldots, t_n) \text{ ha } 0 \leq t_1 \leq 1/2$$

$$(u + v)(t_1, \ldots t_n) = v(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) \text{ ha } 1/2 \leq t_1 \leq 1$$

definíció $\Omega^n(X, x_0)$ egy újabb elemét adja, és könnyen látható, hogy az $([u], [v]) \mapsto [u + v]$ hozzárendelés a homotópiaosztályok szintjén (tehát $\pi_n(X, x_0)$-on) csopotstruktúrát határoz meg. Az így kapott (továbbra is $\pi_n(X, x_0)$-lal jelölt) csoportot az X tér (x_0 kezdőponthoz tartozó) n-dimenziós *homotopikus csoportjának* nevezzük.

9.3.2. állítás. *Ha $n \geq 2$ akkor a $\pi_n(X, x_0)$ csoport kommutatív.*

Bizonyítás. Húzzuk össze az I^n kocka $0 \le t_1 \le 1/2$ felét t_2 irányban az alsó $t_2 \le 1/2$ felére, a kocka másik felét ($1/2 \le t_1 \le 1$) pedig a felső $t_2 \ge 1/2$ felére. Most e két kisebb kocka egymással megcserélhető a kocka identitásának egy homotópiája által. E két kis kockát állandóan az u és v szferoidokkal leképezve, a kis kockákon kívüli részt pedig állandóan az x_0 pontba képezve, egy, az $u+v$ szferoidot a $v+u$ szferoiddal összekötő homotópiát kapunk. Vagyis $u+v$ homotóp $v+u$-val, tehát $[u]+[v]=[u+v]=[v+u]=[v]+[u]$, amivel a bizonyítás kész. □

9.3.3. megjegyzés. A kezdőpont homotópia során való fixen tartása (hasonlóan a fundamentális csoportról tanultakhoz, ld. **??**) akkor fontos, ha $\pi_1(X,x_0)$ nem nulla. Amennyiben $\pi_1(X,x_0)=0$, akkor a szferoidokat definiálhatjuk, mint $S^n \to X$ folytonos leképezéseket, és a homotópia tetszőleges szabad homotópia lehet.

Legyen $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ folytonos leképezés. A korábbiakhoz hasonlóan f egy $\pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,y_0)$ homomorfizmust indukál, és igaz lesz az is, hogy egy kompozíció által indukált homomorfizmus az indukált homomorfizmusok kompozíciójával lesz azonos. Ebből könnyen adódik

9.3.4. következmény. *Ha X pontra húzható, akkor $\pi_n(X)=0$ teljesül minden n-re.*

A későbbiekben látni fogjuk, hogy ha $m<n$, akkor $\pi_m(S^n)=0$ és $\pi_n(S^n)\ne 0$ (mert az identikus leképezés nem homotóp a konstanssal). Itt jegyezzük meg, hogy az összes $\pi_{n+k}(S^n)$ csoport a mai napig nem ismeretes.

9.4 Feladatok

1. Lássuk be, hogy egy gráf fundamentális csoportja szabad.
2. Hagyjunk el egy zárt felületből $k>0$ pontot. Lássuk be, hogy a maradék fundamentális csoporja szabad. Hány elem generálja?
3. Bizonyítsuk be, hogy egy G topologikus csoport fundamentális csoportja kommutatív.
4. Mi $U(1)$, $SO(2)$, $SU(2)$ és $SO(3)$ fundamentális csoportja?
5. Legyen $X = S^2 \cup$ az egyenítő síkjában egy körlap. Mi lesz $\pi_1(X)$?
6. Számítsuk ki $\pi_1(S^1 \vee S^2)$-t.
7. Van-e a $T^2 = S^1 \times S^1$ tóruszban olyan körvonal melyre T^2 retrahálható?
8. Keressük meg a 8 számjegy (mint topologikus tér) egy egyszeresen összefüggő fedését.
9. A (valós) projektív síkon két pontot összecsíptünk. Mi a kapott tér fundamentális csoportja?
10. Határozzuk meg az $S^1 \times S^1 \to S^2$ leképezések homotópia-osztályainak számát.
11. Lássuk be, hogy $\pi_1(\mathbb{CP}^n)=0$.
12. Legyenek $p_i\colon X_i \to Y$ fedőleképezések ($i=1,2$), és tegyük fel, hogy X_1 és X_2 homeomorfak. Következik-e ebből az, hogy létezik olyan $h\colon X_1 \to X_2$ homeomorfizmus, melyre $p_2 \circ h = p_1$?
13. Lássuk be, hogy a T^2 tórusznak nem retraktuma egy benne fekvő körlap.
14. Tegyük fel, hogy az $f,g\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos függvényekre $f(-x)=-f(x)$ és $g(-x)=-g(x)$ teljesülnek. Lássuk be, hogy f-nek és g-nek létezik közös gyöke.
15. Legyen $f\colon S^2 \to S^2$ folytonos. Lássuk be, hogy van olyan $x \in S^2$ melyer vagy $f(x)=x$ vagy $f(x)=-x$ teljesül.
16. Legyen X egyszeresen összefüggő és $g\colon Z \to Y$ egy adott fedés. Lássuk be, hogy ekkor tetszőleges folytonos $f\colon X \to Y$ függvényre létezik egy $\varphi\colon X \to Z$ felemelt, vagyis egy olyan $varphi$ mely teljesíti a $g \circ \varphi = f$ egyenletet.

17. Lássuk be, hogy ha $p: X\ toY$ egy fedés, akkor $\pi_n(X) \equiv \pi_n(Y)$ minden $n \geq 2$ esetén.

18. Legyen ismét $g: Z \to Y$ adott fedés. Bizonyítsuk be, hogy egy $f: X \to Y$ függvény pontosan akkor emelhető fel $\varphi: X \to Z$-vé ha $f_*(\pi_1(X)) \leq g_*(\pi_1(Z))$.

19. Lássuk be, hogy ha $p_i: X_i \to Y$ $(i = 1, 2)$ két fedés, és $(p_1)_*(\pi_1(X_1) = (p_2)_*(\pi_1(X_2)$, akkor van olyan $h: X_1 \to X_2$ homeomorfzmus, hogy $p_2 \circ = p_1$. (Ekkor a két fedést *ekvivalensnek* nevezzük.)

20. Számítsuk ki $\pi_2(S^1 \vee S^2)$-t.

21. Igazoljuk, hogy $\pi_n(S^\infty) = 0$ minden $n \geq 1$-re.

22. Lássuk be, hogy $\pi_i(S^3) = \pi_i(S^2)$ ha $i \leq 3$.

23. Számítsuk ki $\pi_i(G)$-t ha $G = U(1),\ U(2),\ SO(2),\ SO(3),\ SU(2)$ és $i \leq 3$.

24. Számítsuk ki $\pi_n(A \times B)$-t $\pi_n(A)$ és $\pi_n(B)$ ismeretében.

25. Tegyük fel, hogy X útösszefüggő és ..??.. Lássuk be, hogy ekkor létezik egy olyan $p: \tilde{X} \to X$ fedés, melyre $\pi_1(\tilde{X}) = 1$. Lássuk be továbbá, hogy $\tilde{X}$ egyértelmű, $\pi_1(X)$ hat $\tilde{X}$-en és $\tilde{X}/\pi_1(X) = X$. (*Útmútatás:* Legyen $\tilde{X} = \{\varphi: [0,1] \to X \mid \varphi(0) = x_0\}/\sim$ ahol $\varphi_1 \sim \varphi_2$ pontosan akkor ha $\varphi_1(1) = \varphi_2(1)$ és a $\varphi_2 * \varphi_1$ hurok X-ben nullhomotóp. Legyen $p: \tilde{X} \to X$ a $\varphi \mapsto \varphi(1)$ formulával definiált leképezés; $\tilde{X}$-ben a topológia bázisát pedig adja meg $\{\tilde{U} \mid U \text{ nyílt } X\text{-ben}\}$, ahol $\tilde{U} = \{\varphi \in \tilde{X} \mid \varphi(1) \in U\}$. Erről az $\tilde{X}$-ról lássuk be a feladatban leírt tulajdonságokat.) $\tilde{X}$-ot X *univarzális fedésének* nevezzük.

26. Legyen $G \leq \pi_1(X)$ egy részcsoport és X mint az előző feladatban. Keressünk olyan $p: X_G \to X$ fedést, melyre $p_*(\pi_1(X_G)) = G$ a $\pi_1(X)$ csoportban.

27. Lássuk be, hogy a $p_1: X_1 \to X$ és $p_2: X_2 \to X$ fedésekre pontosan akkor létezik egy $h: X_1 \to X_2$, $p_2 \circ h = p_1$ egyenletet kielégítő homeomorfizmus, ha $(p_1)_*(\pi_1(X))$ és $(p_2)_*(\pi_1(X))$ konjugált részcsoportjai $\pi_1(X)$-nek (azaz létezik egy olyan $g \in \pi_1(X)$ hogy $g^{-1}(p_1)_*(\pi_1(X))g = (p_2)_*(\pi_1(X))$).

28. Bizonyítsuk be, hogy az univerzális fedőtér fedi a tér valamennyi fedését.

29. Tegyük fel, hogy egy G csoport úgy hat az X téren, hogy minden $p \in X$ pontnak létezik olyan U környezete, melyre $U \cap gU = \emptyset$ minden $g \neq 1$ csoportelemre. Lássuk be, hogy ekkor az $X \to X/G$ faktorleképezés fedés. (Az ilymódon előálló fedéseket *reguláris* fedéseknek nevezzük.)

30. Bizonyítsuk be, hogy egy $p: X \to Y$ fedőleképezés pontosan akkor reguláris, ha a $p_*(\pi_1(X)) \leq \pi_1(Y)$ részcsoport normálosztó.

31. Lássuk be, hogy minden kétszeres fedés reguláris.

10. fejezet

Kis csomóelmélet

10.1 Csomók és csoportjaik

10.1.1. definíció. Az $\mathbb{R}^3$ (vagy S^3) tér egy $K \subset \mathbb{R}^3$, az S^1 körvonallal homeomorf részét *csomónak* nevezzük. Egy $K \subset \mathbb{R}^3$ csomó *szelíd*, ha minden $x \in K$ pontnak létezik olyan U_x ($\mathbb{R}^3$-beli) környezete, hogy az $(U_x, K \cap U_x)$ pár a (D^3, D^1) párral homeomorf, ahol D^1 a D^3 golyó átmérője. K_1 és K_2 csomók ekvivalensek, ha létezik $\mathbb{R}^3$-nak olyan h homeomorfizmusa, mely az egyiket a másikba viszi.

10.1.2. megjegyzés. Szűkebb értelemben két csomó ekvivalens, ha a fenti h homeomorfizmus választható úgy, hogy az $\mathbb{R}^3$ identikus leképezésével izotóp legyen. Ez azt jelenti, hogy létezik egy H_t homotópia, melyre $H_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, $H_1 = h$, és minden t-re a H_t homeomorfizmus.

EZ MIERT KELL IDE?? KAPCSOLAT????

A $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ csoportot a K csomó csoportjának nevezzük.

10.1.3. állítás. *Teszőleges K csomóra $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \pi_1(S^3 \setminus K)$. (Az izomorfizmus valójában tetszőleges kompakt $K \subset \mathbb{R}^3$ halmaz esetén teljesül.)*

Bizonyítás. Tekintsük S^3-at mint $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, és legyen U_∞ a $\infty \in S^3$ pont egy K-tól diszjunkt, a nyílt D^3 golyóval homeomorf környezete. A Van Kampen tételt az $X_1 = U_\infty$, $X_2 = \mathbb{R}^3 \setminus K$ nyílt halmazokkal lefedett $S^3 \setminus K$ térre alkalmazva az eredmény adódik. (Vegyük észre, hogy $X_1 \cap X_2$ homeomorf $S^2 \times (0,1)$-gyel.) $\square$

A csomóelmélet központi problémája további, a fent definiált csoporthoz hasonló, algebrai jellegű invariánsok találása, azok kiszámítása, majd annak vizsgálata, hogy a talált invariánsok mennyiben határozzák meg a csomót vagy annak néhány fontos tulajdonságát. Alább részletesen a triviális, majd általánosabban a tórikus csomók csoportjával foglalkozunk.

10.2 Tórikus csomók

10.2.1. definíció. Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ az egységnyi hosszúságú $\mathbb{R}^2$-beli vektorok által alkotott tér. K képét az $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ standard beágyazásnál a *triviális csomónak* hívjuk.

Először a triviális csomó csoportját határozzuk meg. Ehhez megmutatjuk, hogy S^3 megkapható két tömör tóruszból úgy, hogy azok peremeit az $(u, v) \mapsto (v, u)$ ($u \in S^1, v \in S^1$) leképezéssel azonosítjuk. Ennek a felbontásnak két különböző leírását adjuk meg:

1. leírás: Legyen $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ az egységnyi hosszúságú komplex ($\mathbb{C}^2$-beli) vektorok tere, vagyis $S^3 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Ekkor $S^3 = A_1 \cup A_2$, ahol A_i-ben z_i abszolútértéke nem nagyobb, mint a másik z-koordinátáé. Nem nehéz belátni, hogy A_i ($i = 1, 2$) egy-egy tömör tórusz: ezt bizonyítja például a $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, \frac{z_2}{|z_2|})$ formulával adott $A_1 \to D^2 \times S^1$ leképezés (itt D^2 az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sugarú zárt körlap míg S^1 az egységsugarú körvonal).

10.2.2. megjegyzés. Az $A_1 \cap A_2$ tórusz $z_1 \in S^1$-gyel és $z_2 \in S^1$-gyel koordinátázható. A tórusz így nyert $S^1 \times S^1 = A_1 \cap A_2 \subset S^3$ beágyazását a *standard S^3-beli beágyazásnak* nevezzük.

2. leírás: Mivel S^3 a D^4 4-dimenziós golyó pereme, és D^4 a $D^2 \times D^2$ szorzattal homeomorf, így $S^3 = \partial D^4 = \partial(D^2 \times D^2) = \partial D^2 \times D^2 \cup D^2 \times \partial D^2$.

10.2.3. megjegyzés. Ez a leírás azt is mutatja, hogy hasonló felbontások léteznek minden dimenzióban — méghozzá minden dimenzióban sok ilyen felbontás van: Legyenek ugyanis p, q, n tetszőleges olyan természetes számok, melyekre $n = p+q$. Ekkor $S^{n-1} = \partial D^n = \partial(D^p \times D^q) = \partial D^p \times D^q \cup D^p \times \partial D^q = S^{p-1} \times D^q \cup D^p \times S^{q-1}$.

A triviális csomót a fenti $S^3 = A_1 \cup A_2$ felbontás egyik tömör tóruszának tengelyével azonosítva azt kapjuk, hogy $S^3 \setminus \{\text{triviális csomó}\}$ az S^1 körvonallal (a másik tömör tórusz tengelyével) homotóp ekvivalens. Ebből pedig $\pi_1(S^3 \setminus \{\text{triviális csomó}\}) \approx \mathbb{Z}$ adódik. Térjünk most rá röviden a tórikus csomók vizsgálatára.

10.2.4. definíció. Legyen p és q két relatív prím természetes szám. Az $\mathbb{R}^2$ síkon vegyük a p/q meredekségű, origón átmenő egyenest. $\mathbb{R}^2$-t a $\mathbb{Z}^2$ egységrácsszerint faktorizálva egy tóruszt kapunk, az említett egyenes képe pedig egy γ zárt görbe lesz ezen a tóruszon. A tórusz standard $\mathbb{R}^3$-beli (vagy S^3-beli) beágyazását tekintve γ képét *tórikus (p,q)-csomónak* nevezzük és $T(p,q)$-val jelöljük.

Következő célunk a torikus csomók csoportjainak meghatározása és ennek segítségével annak tisztázása, hogy ezen csomók között vannak-e triviálisak, és általában melyek ekvivalensek egymással. Legyen ehhez ε egy igen kicsi pozitív szám, és legyen $K(3\varepsilon)$ a $K = T(p,q) \subset S^3$ csomó 3ε környezete; elég kis ε-t választva $S^3 \setminus K$ homotopikusan ekvivalens lesz $S^3 \setminus K(3\varepsilon)$-vel. Legyen A_1 és A_2 a fenti két tömör tórusz és legyen $X_1 = A_1 \setminus K(\varepsilon)$, illetve $X_2 = A_2 \setminus K(\varepsilon)$. Ekkor $X_1 \cap X_2 \equiv S^1 \times S^1 \setminus K \approx S^1 \times I$, valamint $\pi_1(X_1) \approx \mathbb{Z} = \langle\alpha\rangle$, $\pi_1(X_2) \approx \mathbb{Z} = \langle\beta\rangle$ és $\pi_1(X_1 \cap X_2) \approx \mathbb{Z} = \langle\gamma\rangle$. Az $i_1 \colon X_1 \cap X_2 \to X_1$ és $i_2 \colon X_1 \cap X_2 \to X_2$ beágyazások által indukált $i_{1*} \colon \pi_1(X_1 \cap X_2) \to \pi_1(X_1)$ és $i_{2*} \colon \pi_1(X_1 \cap X_2) \to \pi_1(X_2)$ homomorfizmusokat pedig az $i_{1*}(\gamma) = \alpha^p$ és $i_{1*}(\gamma) = \beta^q$ formulák adják meg. A Van Kampen tételt alkamazva így azt kapjuk, hogy $\pi_1(S^3 \setminus T(p,q)) = G(p,q) \approx \langle \alpha, \beta \mid \alpha^p = \beta^q \rangle$.

10.2.5. megjegyzés. A $T(p,q)$ és $T(q,p)$ csomók izomorfak, mert a $(z_1, z_2) \to (z_2, z_1)$ formulával $S^3 \to S^3$ homomorfizmus egymásba viszi őket.

10.3 Fonatcsoportok

10.3.1. definíció. Tekintsük n darab $[0,1]$ szakasz diszjunkt uniójának beágyazását az $\mathbb{R}^2$ feletti $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ hengerbe. Tegyük fel, hogy a szakaszok 0 végpontjai az $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ sík x tengelyén a $0, 1, \ldots, n$ pontok valamelyikébe képződnek, hasonlóan az 1 végpontok az $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ sík x tengelyén a $0, 1, \ldots, n$ pontok valamelyikébe képződnek, végül pedig az $\mathbb{R}^2 \times [0,1] \to [0,1]$ vetítés kompozíciója az egyes szakaszok $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$-be való beágyazásaival monoton $[0,1] \to [0,1]$ függvényeket adnak. Egy ilyen $[0,1] \cup [0,1] \cup \ldots [0,1] \to \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ beágyazást egy n szálból (fonalból) álló *fonatnak* nevezünk. Két fonatot ekvivalensnek tekintünk, ha egymásba átdeformálhatók a fontok terében.

Két fonatot egymás után írva egy újabb fonatot kapunk. Ilymódon a fonatok ekvivalenciaosztályainak a szorzatát definiálhatjuk. Ilymódon az összes n szálból álló fonatok ekvivalenciaosztályainak halmaza egy csoportot alkot, melyet B_n-nel jelölünk és *fonatcsoportnak (Braid group)* nevezünk.

Tegyük fel, hogy egy $\beta \in B_n$ fonatra az i pontban kezdődő fonal végpontja a $\sigma(i) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pont. Ilymódon egy $\beta \mapsto \sigma$ természetes hozzárendleést kapunk, mely egy $B_n \to S_n$ epimorfizmust ad. Ezen epimorfizmus magját színezett (vagy tiszta) fonatcsoportnak nevezzük és $\tilde{B}_n$-nel jelöljük.

10.3.2. tétel. *(1) $B_3 \approx G(2,3)$*
(2) Legyen P azon 1 főegyütthatós harmadfokú polinomok tere melyeknek nincs többszörös gyökük. Ekkor $\pi_1(P) \approx G(2,3)$.

Bizonyítás. A P-beli hurkok könnyen azonosíthatók a 3-szálú fonatok ekvivalenciaosztályaival, így $\pi_1(P) \approx B_3$; következésképp (1) és (2) ekvivalensek. Most belátjuk a következő, (2)-nél lényegesen erősebb állítást: A fenti P tér homotopikusan ekvivalens az $S^3 \setminus T(2,3)$-térrel, vagyis a $(2,3)$ torikus csomó komplementumával.

Legyen P' a $f_{p,q} = z^3 + 3pz + 2q$ többszörös gyökökkel nem bíró polinomok tere. Minden ilyen polinomot azonosítunk $\mathbb{C}^2$ egy pontjával, nevezetesen az $f_{p,q}$ polinomot a (p,q) ponttal. Jelölje P" az $S^3 \cap P'$ metszetet, ahol S^3 a $\sqrt{2}$ sugarú origó középpontú gömb $\mathbb{C}^2$-ben. Azt állítjuk, hogy P" homeomorf az $S^3 \setminus T(2,3)$ térrel. Valóban, az $f_{p,q}$ polinomnak pontosan akkor van többszörös gyöke, ha $p^3 = q^2$. Vegyük észre, hogy ha $p^3 = q^2$, akkor $|p| > 1 \Longleftrightarrow |q| > 1$ és $|p| < 1 \Longleftrightarrow |q| < 1$. Tehát a $p^3 = q^2$ felület a $\sqrt{2}$ sugarú $S^3 = \{(p,q)||p^2| + |q^2| = 2\}$ felületet csak a $|p| = |q| = 1$ tórusz $p^3 = q^2$ egyenlőségnek eleget tevő $\{p,q\}$ pontjaiban metszi. Ám ez éppen a $T(2,3)$ csomó. Most már csak azt kell belátnunk, hogy (a) P' homotóp ekvivalens P"-vel és (b) P homotóp ekvivalens P'-vel.

(a) bizonyítása: Legyen $(p,q) \in P'$ egy pont. Ekkor pontosan egy olyan pozitív λ létezik, melyre a $(p',q') = (\lambda^3 p, \lambda^2 q)$ rajta van az S^3 gömbön. Vegyük észre, hogy $p'^2 = q'^3 \iff p^2 = q^3$. Így a $(p,q) \to (p',q')$ hozzárendelés P' egy deformációját adja P"-re. Evvel az (a) pontot beláttuk.

(b) bizonyítása: Legyen $C^3 = \{a,b,c\}$ az $f_{a,b,c}(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ polinomok tere. Definiáljuk e tér φ_t deformációját a következő módon: $\varphi_t(f_{a,b,c})(z) = f_{a,b,c}(z - \frac{at}{3})$. Ekkor $\varphi_0 =$ identitás, $\varphi_1(f_{a,b,c})$-nek nincs másodfokú tagja, és ha $\varphi_t(f_{a,b,c})$-nek valamilyen t-re van többszörös gyöke, akkor minden t-re van. Ezért φ_t a P tér egy deformációját adja P'-re. $\square$

10.3.3. definíció. Legyen $Y_3 = C^3 \setminus \{(z_1, z_2, z_3) \mid \text{van olyan } i,j \text{ indexpár, hogy } z_i = z_j\}$. Ezen a téren az S_3 permutáció csoport természetesen és szabadon hat; az $X_3 = Y_3/S_3$ faktorteret *konfigurációs térnek* nevezzük.

10.3.4. következmény. $\pi_1(X_3) \approx G(2,3) \approx B_3$. $\square$

Végül arra a kérdésre adunk választ, hogy hogyan számolható ki egy tetszőleges csomó csoportja annak diagrammjából. (Egy csomó diagrammja nem más, mint a csomónak egy általános helyzetű síkra vett vetülete, melyben a kettőspontoknál feltüntettük, hogy melyik ív halad felül és melyik alul.) A csomó csoportjának az alábbiak szerint megkapott prezentációját *Wirtinger prezentációnak* nevezik. Tehát:

Az alsó íveket a kereszteződéseknél megszakítva a vetület n darab komponensre esik szét. Jelölje ezeket a komponenseket $a_1, \ldots, a_n$, ezek lesznek a generátorok. Minden kereszteződéshez tartozik egy reláció: Legyen egy kereszteződésnél a két alsó ív a_k és a_j, a felső pedig a_i. Ekkor a kereszteződéshez tartozó relációt $a_j = a_i a_k a_i^{-1}$ adja meg. Annak bizonyítása, hogy az ilymódon prezentált csoport a csomó csoportjával lesz izomorf, a Van Kampen tétel megfelelő alkalmazásán múlik.

10.4 Feladatok

1. Konstruáljunk nem szelíd csomót. (Az ilyen csomót *vadnak* is nevezik.)

2. Lássuk be, hogy $p,q > 1$ esetén $G(p,q)$ nem kommutatív. (*Útmutatás:* Jelölje S_3 a háromelemű halmaz szimmetrikus csoportját. Az $\alpha \mapsto (1,2), \beta \mapsto (1,2,3)$ hozzárendelés egy $G(2,3) \to S_3$ ráképezést indukál, ami $p = 2,\ q = 3$ esetére bizonyítja az állítást. Hasonlóan járhatunk el akkor is ha p és q két különböző prím és $p < q$. Ekkor az $\alpha \mapsto (1,2,\ldots,p)$, $\beta \mapsto (1,2,\ldots,q)$ hozzárendelés egy $G(p,q) \to S_q$ homomorfizmust ad meg. Ha $G(p,q)$ kommutatív lenne, akkor $G(p,q) \approx \mathbb{Z}_{pq}$ és S_q-beli képe is ilyen. Legyen a kép generátora g és tekintsük g felbontását független ciklusok szorzatára. Mivel g rendje pq, a felbontásban szereplő minden ciklus hossza pq osztója. Ám sem pq hosszúságú ciklus, sem pedig egy p és egy q hosszúságú független ciklus nincs S_q-ban. Ha pedig nincs q hosszúságú ciklus g felbontásában, akkor a szorzat rendje nem lesz q-val osztható (hiszen 1 vagy p lesz).)

3. Igazoljuk, hogy $G(p,q)$ és $G(p',q')$ pontosan akkor izomorfak ha $\{p,q\} = \{p',q'\}$ mint rendezetlen számpárok. (*Útmutatás:* Lássuk be először, hogy $G(p,q)$ centruma egyenlő $\langle \alpha^p \rangle$-vel, majd bizonyítsuk be, hogy $G(p,q)$ centruma szerinti faktora a $\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$ (vagyis $\mathbb{Z}_p$ és $\mathbb{Z}_q$ szabad szorzata) csoporttal izomorf. Ezen csoportokban a maximális véges rendű elemek rendjei q és p. Tehát ha $\{p,q\} \neq \{p',q'\}$ akkor $G(p,q) \neq G(p',q')$.)

4. Lássuk be, hogy P homeomorf X_3-mal.

5. Számítsuk ki a 8-as csomó (lásd ??? rajz) csoportját.

6. Igazoljuk hogy K és $\bar{K}$ (a K csomó tükörképe) összefűzésével kapott $K\#\bar{K}$ csomó csoportja izomorf $K\#K$ csoportjával.

7. Lássuk be, hogy egy csomó G csoportja teljesíti a $G/[G,G] \cong \mathbb{Z}$ azonosságot.

8. Legyenek $\sigma_i \in B_n$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ elemi fonatok. Bizonyítsuk be, hogy a σ_i-k generálják B_n-t. Lássuk be, hogy $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ és $\sigma_i\sigma j = \sigma_j\sigma i$ amennyiben $|i-j| > 1$. (Valójában ezek az azonosságok, mint relációk megadják B_n egy prezentációját.)

9. Lássuk be, hogy minden $K \subset S^3$ csomóra létezik egy olyan $\Sigma \subset S^3$ felület, melyre $\partial\Sigma = K$. (Egy ilyen felületet a csomó egy *Seifert felületének* nevezünk.)

10. Egy β fonat megfelelő végeit összekötve egy $\hat{\beta} \subset S^3$ (esetleg többkomponensű) csomót kapunk. Lássuk be, hogy $\beta \in B_n \leq B_{n+1}$-re $\hat{\beta}$ és $\widehat{\beta\sigma_n}$ ekvivalensek. Hasonlóan, igazoljuk, hogy minden $\alpha, \beta \in B_n$ esetén $\hat{\beta}$ és $\widehat{\alpha^{-1}\beta\alpha}$ ekvivalensek.

11. Keressünk olyan $\beta \in B_n$ fonatot melyre $\hat{\beta}$ a triviális csomó és olyant is, melyre $\hat{\beta} = T(2,3)$.

11. fejezet

CW-komplexusok

11.1 Véges cella-komplexusok

A következőkben csak véges CW-komplexusokkal (vagy másnéven cella-komplexusokkal) fogunk foglalkozni, ezért a véges szót gyakran elhagyjuk majd. A (véges) CW-komplexusokat pedig dimenzió szerinti indukcióval definiáljuk.

11.1.1. definíció. • Véges sok pontot (a diszkrét topológiával ellátva) *0-dimenziós (véges) CW-komplexusnak* nevezünk.

- Egy véges gráf "teste" (azaz az a topologikus tér, melyet a csúcsainak és éleinek egyesítése alkot) egy 1-dimenziós (véges) CW-komplexust ad. Pontosabban: Legyen X_0 a gráf csúcsainak halmaza; ez egy 0-dimenziós CW-komplexus. Legyen továbbá $\{D_i^1\}$ a gráf éleinek halmaza; ez véges sok $[0,1]$ szakasz egyesítése. Legyen $\varphi_i\colon \partial D_i^1 \to X_0$ az a leképezés, mely a $D_i^1 = [0,1]$ szakasz két végpontját ezen él két végpontját alkotó két (esetleg egybeeső) X_0-beli csúcsba képezi, és azonosítsunk az $X_0 \cup \bigcup_i D_i^1$ diszjunkt unióban minden $x \in \partial D_i^1$ elemet a képével. A kapott X_1 tér egy *1-dimenziós CW-komplexus* lesz.

- Legyen adva egy X_1 1-dimenziós komplexus és (véges sok) $D_1^2, \ldots, D_l^2$ körlap, továbbá ezek peremein a $\varphi_i\colon \partial D_i^2 \to X_1$ folytonos leképezések. Tekintsük az $X_1 \cup \bigsqcup_i D_i^2$ diszjunkt uniót és ebben azonosítsunk minden $x \in \partial D_i^2$ pontot a képével. A kapott X_2 faktortér definíció szerint egy *2-dimenziós komplexus* lesz.

- Legyen végül adva egy X_{n-1} $(n-1)$-dimenziós komplexus, továbbá l_n darab n-dimenziós golyó és ezek mindegyikének a peremén egy folytonos $\varphi_i\colon D_i^n \to X_{n-1}$ leképezés $(1 \le i \le l_n)$. Tekintsük a $X_{n-1} \cup \bigsqcup_i D_i^n$ diszjunkt uniót és ebben azonosítsunk minden $x \in \partial D_i^n$ pontot a képével. A kapott X_n faktorteret *n-dimenziós CW-komplexusnak* nevezzük.

A definícióból nyilvánvalóan következik, hogy $\operatorname{int} D_i^n \subset X_n$ minden i-re és n-re. Ezt a részteret n-dimenziós nyílt cellának, ennek lezárását zárt cellának, a megfelelő φ_i leképezést az adott cella ragasztó leképezésének nevezzük. A zárt D_i^n golyóknak is adódik egy leképezésük az X_n-be, mely az $\operatorname{int} D_i^n$ belső részeken homeomorfizmus a nyílt cellára. Ezen $D_i^n \to X_n$ leképezést az adott (zárt) cella karakterisztikus leképezésének nevezzük.

11.1.2. definíció. Az X CW-komplexus legfeljebb k dimenziós celláinak egyesítését az X komplexus *k-vázának* (vagy *k-skeletonjának*) nevezzük és $sk_k(X)$-szel jelöljük.

11.1.3. megjegyzés. Végtelen sok cella esetén feltesszük, hogy X topológiája az alábbi két (a "CW-komplexus" elnevezés eredetét mutató) feltételt teljesíti:
(C) (closure finite) Minden zárt cella csak véges sok alacsonyabb dimenziós cellát metsz.
(W) (weak) A topológia a leggyengébb olyan, melyben minden karakterisztikus leképezés folytonos. (Másszóval egy részhalmaz pontosan akkor zárt ha minden zárt cellával való metszete zárt.)

11.1.4. tétel. *Minden véges CW-komplexus beágyazható elég nagy dimenziós euklideszi térbe.*

Bizonyítás. Indukcíót alkalmazva elég belátni azt, hogy ha $X \subset \mathbb{R}^k$ és $Y = X \cup_f D^n$, azaz Y-t az X-ből egy D^n golyó odaragasztásával kaptuk (egy $f\colon \partial D^n \to X$ leképezés segítségével), akkor Y beágyazható elég nagy dimenziós euklideszi térbe. Helyezzük el X-et az $\mathbb{R}^{k+1}$ egy origón át nem menő affin hipersíkjában, D^n-et pedig az $\mathbb{R}^{n+1}$ egy origón át nem menő hipersíkjában. Azonosítsuk az $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{k+1}$ tér $\mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}$ illetve $\{0\} \times \mathbb{R}^{k+1}$ altereit $\mathbb{R}^{n+1}$-gyel illetve $\mathbb{R}^{k+1}$-gyel. Most az $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{k+1}$ térben kössük össze egyenes szakasszal a $q \in \partial D^n$ pontot az $f(q) \in X$ ponttal. Ezen szakaszok egyesítését véve minden $q \in \partial D^n$-re majd ezt az uniót D^n-nel és X-szel egyesítve $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{k+1}$-ben egy részteret kapunk, mely az Y térrel homeomorf. $\square$

11.1.5. következmény. *Minden véges CW-komplexus metrizálható. Így speciálisan T_2, sőt T_4 tulajdonságú. Mivel az M_2 tulajdonság öröklődik, így minden véges CW-komplexus M_2-tér.* $\square$

Vegyük észre, hogy (mivel S^n minden $n \geq 1$-re útösszefüggő) egy CW-komplexus pontosan akkor útösszefüggő ha sk_1 1-váza útösszefüggő.

11.1.6. állítás. *Minden útösszefüggő CW-komplexus homotopikusan ekvivalens egy olyannal, melyben egyetlen 0-dimenziós cella van.*

Bizonyítás (vázlat). Legyen X útösszefüggő, tehát sk_1X egy összefüggő gráf. Legyen $\Gamma \subset sk_1X$ egy feszítő fa. Mivel Γ pontrahúzható, az $X \to X/\Gamma$ leképezés homotopikus ekvivalencia. $\square$

Legyen tehát X egy (véges) útösszefüggő CW-komplexus; az előbbiek szerint ekkor feltehető, hogy sk_0X egyetlen pontból áll. Ekkor az 1-váz körvonalak csokra, azaz $sk_1(X) = \vee_{i=1}^n S_i^1$. A **??** lemma szerint $\pi_1(sk_1(X)) = F_n =$ szabad csoport n generátorral (ahol tehát minden 1-dimenziós cellának egy generátor felel meg). Tekintsük X 2-vázát: $sk_2(X) = sk_1(X) \cup_{\varphi_1} D_1^2 \cup_{\varphi_2} D_2^2 \cup \ldots_{\varphi_l} D_l^2$. Ennek $\pi_1(sk_2(X))$ fundamentális csoportja az $F_n/\{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}$ csoporttal izomorf (ahol $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}$ a φ_i leképezések homotópiaosztályai által generált normálosztót jelenti. Pontosabban, minthogy nem biztos, hogy a φ leképezések a körvonal kezdőpontját a kezdőpontba képezik, ezért minden φ_i helyett egy $\gamma_i \varphi_i \gamma_i^{-1}$ alkú hurkot kell venni, ahol γ_i egy tetszőleges út az X-beli kezdőponttól a körvonal kezdőpontjának φ_i-nél vett képéig.) A további cellák ragasztása során a fundamentális csoport nem változik (ld. **??** lemmát), így

$$\pi_1(sk_2(X)) \approx \pi_1(sk_3(X)) \approx \pi_1(sk_4(X)) \approx \ldots \approx \pi_1(X).$$

Következésképp egy (véges) útösszefüggő X cellakomplexus fundamentális csoportját a

$$\pi_1(X) = \{\text{generátorok=1-cellák} \mid \text{relációk =2-cellák}\}$$

prezentáció adja meg.

11.1.7. megjegyzés. Ha $sk_0(X)$ nem egy pont, akkor válasszunk $sk_1(X)$-ben egy feszítő fát. Minden további (irányított) él egy generátort definiál $\pi_1(sk_1(X))$-ben, a relációk pedig a 2-cellák ragasztó leképezései lesznek.

11.2 Kanonikus felületek

11.2.1. definíció. Az S^2 gömbfelöletből p darab körlapot elhagyva és mindegyik perem-körvonalhoz egy kilyukasztott tóruszt (melynek pereme szintén egy körvonal) hozzáragasztva az A_p, *p füllel (vagy fogantyúval) ellátott gömböt* kapjuk. Tehát (a tóruszt T^2-vel jelölve)

$$A_p = S^2 \setminus pD^2 \cup (T^2 \setminus D^2) \cup \ldots \cup (T^2 \setminus D^2) \ \ \text{(a peremek mentén azonosítva)}.$$

Hasonlóan definiáljuk az *A'_q gömb q szalaggal* nevű felületet: S^2-ből elhagyunk q darab körlapot és mindegyik perem-körvonalhoz hozzáragasztunk egy Möbius szalagot (melynek pereme szintén egy körvonal). Tehát

$$A'_q = S^2 \setminus qD^2 \cup (\mathbb{RP}^2 \setminus D^2) \cup \ldots \cup (\mathbb{RP}^2 \setminus D^2) \ \ \text{(a peremek mentén azonosítva)}.$$

11.2.2. definíció. Az S^2, A_p és A'_q $(p \geq 1, q \geq 1)$ felületeket *kanonikus felületeknek* nevezzük.

11.2.3. tétel. *A kanonikus felületek páronként nem homeomorfak egymással.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz megadjuk az A_p felület egy cellafelbontását, melyben egy darab 0-cella, egy darab 2-cella és $2p$ darab 1-cella lesz. (Valójában belátható, hogy ez egy minimális cellafelbontása az A_p-nek, ennél kevesebb cellája egyetlen dimenzióban sem lehet semmilyen cellafelbontásának.) Az 1-váz tehát körvonalak csokra. Jelöljük e köröket egyszer befutó hurkokat rendre $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$ betűkkel. Az egy darab 2-cella ragasztó leképezése a következő lesz: Vegyünk fel a D^2 körlap peremén $4p$ darab osztópontot, s a kapott $4p$ darab (irányított) ívet képezzük rendre az

$$a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_2, b_2, a_2^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_p, b_p, a_p^{-1}, b_p^{-1}$$

hurkokba. Röviden ezt a továbbiakban úgy fogjuk kifejezni, hogy a ragasztó leképezést az $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$ szó adja meg. Az így kapott CW-komplexusról nem nehéz belátni, hogy A_p-vel homeomorf. A fentiek értelmében így $\pi_1(A_p)$ egyszerűen kiszámítható, és azt kapjuk, hogy

$$\pi_1(A_p) \approx \langle a_1, b_1, \ldots, a_p, b_p \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = 1 \rangle.$$

A 11.2.3 tétel bizonyításához még egy fogalomra lesz szükségünk.

11.2.4. definíció. Egy X topologikus tér $\pi_1(X)$ fundamentális csoportjának kommutátorával vett $H_1(X) = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ faktorát X első homológia csoportjának nevezzük.

Könnyű számolás adja, hogy $H_1(A_p) = F_{2p}/[F_{2p}, F_{2p}] \approx \mathbb{Z}^{2p}$, és mivel ezek a csoportok különböző p-kre nem izomorfak, ezért a különböző A_p felületek páronként nem homeomorfak.

A 11.2.3 tétel belátásához most az A'_q felületek cellafelbontását fogjuk tanulmányozni. Ebben a felbontásban ismét egyetlen 0-dimenziós cella lesz, az 1-cellák száma pedig q lesz, tehát az 1-váz q darab körvonal csokra. Az egyetlen 2-cellát az $a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_q a_q$ szónak megfelelő ragasztó leképezés adja meg. (Tehát a körlap peremét most $2q$ részre osztjuk, majd a q darab körvonal csokrában az i. körvonalat egyszer (irányítása szerint) befutó hurkot a_i-vel jelölve a 2-cella peremének íveit rendre az $a_1, a_1, a_2, a_2 \ldots, a_q, a_q$ hurkokra képezzük.) Nem nehéz belátni azt, hogy a kapott cellakomplexus A'_q-vel lesz homeomorf. A felbontásból a fundamentális csoport, abból pedig az első homológia csoport könnyen kiszámolható:

$$\pi_1(A'_q) \approx \langle a_1, \ldots, a_q \mid a_1^2 a_2^2 \ldots a_q^2 = 1 \rangle,$$

$$H_1(A'_q) = \langle a_1, \ldots, a_{q-1}, a_1 + a_2 + \ldots + a_q \mid 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_q) = 0 \rangle = \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

(ahol a $\mathbb{Z}$-k száma $q-1$). Mivel $H_1(X)$ az X tér homotopikus invariánsa, azt kapjuk, hogy az A'_q felületek páronként nem homeomorfak (hiszen az első homológia csoportok rangjai különbözőek). Megkaptuk továbbá azt is, hogy A_p nem homeomorf A'_q ha $p \geq 1$ vagy $q \geq 1$ (mivel az első homológia csoportjaikban a torzió részcsoportok különbözőek). Evvel pedgi beláttuk a 11.2.3 tételt. □

11.3 Feladatok

1. Adjuk meg S^n egy cellafelbontása. (*Útmutatás:* Ez megtehető egy 0-dimenziós és egy n-dimenziós cella felhasználásával.)

2. Adjunk S^n-nek egy olyan felbontását, melyben minden dimenzióban két cella szerepel. (Amennyiben a választott k-cellák az origóra szimmetrikusak, úgy ebből az $\mathbb{RP}^n$ projektív tér egy cella-felbontását kapjuk, melynek minden dimenzióban egy cellája van.)

3. Adjuk meg a tórusznak és a Klein kancsónak egy cellafelbontását.

4. Lássuk be, hogy gy X CW-komplexus pontosan akkor kompakt ha véges sok cellából áll.

5. Adjuk meg $\mathbb{R}^n$-nek $\mathbb{CP}^n$-nek és $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$-nek egy cellafelbontását.

6. Legyen $X \subset \mathbb{R}^2$ az x-tengelyt az origóban érintő, egész sugarú körök uniója. Lássuk be, hogy X az altér topológiával ellátva nem CW-komplexus.

7. Bizonyítsuk be, hogy egy X tér A defomációs retraktuma X-szel homotóp ekvivalens.

8. Lássuk be, hogy $O(n)$ deformációs retraktuma $GL(n;\mathbb{R})$-nek, $U(n)$ pedig $GL(n;\mathbb{C})$-nek.

9. Lássuk be, hogy

   (i) $\mathbb{R}^n$ konvex részei

   (ii) $\mathbb{R}^n$ csillagszerű részei

   (iii) $\mathbb{R}^n$

   (iv) az origó

   (v) véges vagy végtelen fagráfok

   egymással homotóp ekvivalensek.

10. Lássuk be, hogy ha $* = X_0 \subset X_1 \subset \dots$ úgy, hogy X_{n+1} az X_n-re húzható egy X_n-en konstans homotópiával, akkor $X = \cup X_n$ összehúzható.

11. Bizonyítsuk be, hogy S^∞ összehúzható.

12. Legyen e és f két egymást metsző egyenes $\mathbb{R}^3$-ban. Lássuk be, hogy $\mathbb{R}^3 - (e \cup f)$ homotóp ekvivalens $S^1 \vee S^1 \vee S^1$-gyel.

13. Tegyük fel, hogy a K CW-komplexus L részkomplexusa homotopikusan ekvivalens egy ponttal. Lássuk be, hogy a $K \to K/L$ faktorizáló leképezés homotopikus ekvivalencia.

14. Legyen $f\colon K \to X$ folytonos leképezés egy K CW-komplexuson. Egy $L \subset K$ részkomplexusra és $g\colon L \to X$ függvényre tegyük fel, hogy $f|_K$ és g homotópok. Bizonyítsuk be, hogy ez a homotópia kiterjeszthető egy f és g valamely kiterjesztése közötti homotópiává.

15. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tóruszhoz hozzáragasztunk egy-egy körlapot a parallel és a meridián mentén, akkor a kapott tér az S^2 gömbbel lesz homotóp ekvivalens.

16. Lássuk be, hogy egy véges összefüggő gráf véges sok körvonal $\bigvee_i S_i^1$ csokrával homotóp ekvivalens.

17. Igazoljuk, hogy ha $p\colon X \to Y$ egy n-rétű fedés és Y kompakt CW-komplexus, akkor $\chi(X) = n\chi(Y)$.

18. Számítsuk ki a kanonikus felületek Euler karakterisztikáját.

19. Mely kanonikus felületek fedhetik önmagukat 2-r¦etűen?

12. fejezet

Sokaságok

Topologikus terek egy nagyon fontos osztályát alkotják a sokaságok. A következő fejezetekben evvel a fogalommal fogunk megismerkedni, áttekintjük az 1-, 2- és 3-dimenziós sokaságok legalapvetőbb tulajdonságait majd röviden érintjük a magasabb dimenziós sokaságok elméletét is.

12.1 Alapvető tulajdonságok

12.1.1. definíció. Az X topologikus tér egy (topologikus) sokaság, ha [1]
(a) $X \sim T_2$,
(b) $X \sim M_2$,
(c) lokálisan euklideszi; vagyis minden $x \in X$ pontnak létezik egy olyan U_x környezet, mely homeomorf $\mathbb{R}^n$-nel.

12.1.2. állítás. *Az (a), (b), (c) követelmények egymástól függetlenek.*

Bizonyítás. A bizonyítást három példa bemutatásával végezzük el.
(1) Legyen $X = \mathbb{R}^1 \times \{0,1\}/(x,0) \sim (x,1)$ $(\forall x < 0)$. Ekkor X lokálisan euklideszi, de nem Hausdorff: a $(0,0)$ és $(0,1)$ pontoknak nem létezik diszjunkt környezetük. X tehát teljesíti (b)-t és (c)-t, de (a)-t nem.
(2) Legyen most X nem megszámlálhatóan sok egyenes diszjunkt uniója. Ekkor az egyenesekkel való fedésből nem választható ki megszámlálható részfedés, tehát X nem M_2-tér, bár X teljesíti (a)-t és (c)-t.
(3) Legyen végül X egy "kereszt", azaz két $[0,1]$ szakasz diszjunkt uniója, melyeknek azonosítjuk a középpontjait. Erre a térre teljesül (a) és (b), de (c) nem. $\square$

12.1.3. lemma. *Topologikus sokaság lokálisan kompakt (azaz minden pontnak létezik olyan környezete, melynek lezárása kompakt).*

Bizonyítás. Legyen X egy topologikus sokaság, $x \in X$ pedig egy tetszőleges pont. A feltétel szerint x-nek létezik olyan U_x környezete, mely $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf. U_x-ben persze létezik olyan V_x környezet, melynek lezárása U_x-ben kompakt (minthogy $\mathbb{R}^n$ lokálisan kompakt). Ám be kell még látni, hogy V_x X-beli lezárása is kompakt. Minthogy V_x-nek az U_x-beli $\bar{V}_x^{U_x}$ lezárása kompakt, X pedig Hausdorff, ezért ez az U_x-beli lezárás X-ben is zárt. Ezért a V_x X-beli $\bar{V}_x^X$ lezárása része $\bar{V}_x^{U_x}$-nek, sőt annak zárt része. Ám kompakt tér zárt része kompakt, tehát $\bar{V}_x^X$ kompakt. $\square$

12.1.4. lemma. *Topologikus sokaság pontosan akkor útösszefüggő, ha összefüggő. (Általánosabban: az összefüggőségi komponensek megegyeznek az útösszefüggőségi komponensekkel.)*

Bizonyítás. A bizonyítás könnyen következik abból a tényből, hogy minden pontnak létezik útösszefüggő környezete. $\square$

[1] Ha X egy tér és P egy tulajdonság, akkor $X \sim P$ azt jelenti, hogy X rendelkezik a P tulajdonsággal.

12.1.5. lemma. *Egy X topologikus sokaság komponenseinek száma megszámlálható. Ha X kompakt, akkor a komponensek száma véges.*

Bizonyítás. A komponensek nyíltak és a belőlük álló fedésnek nincs valódi részfedése. Mivel X M_2-tér, így a bizonyítás kész. $\square$

12.1.6. definíció. Egy X topologikus teret *peremes sokaságnak* hívunk, ha X T_2- és M_2-tér, valamint minden $x \in X$ pontnak létezik egy, $\mathbb{R}^n$-nel vagy az $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n \mid x_n \geq 0\}$ féltérrel homeomorf U_x környezete.

12.1.7. példák. **(a)** Az $\mathbb{R}^n, S^n, A_p, A'_q, \mathbb{RP}^n$ terek, illetve ezek (véges) szorzatai sokaságok.
(b) A $GL(n, \mathbb{R}), U(n), SU(n), O(n), SO(n)$ mátrixcsoportok illetve $\mathbb{R}^n$ ortonormált vektor k-asai sokaságok.
(c) A D^n zárt golyó egy peremes sokaságok. Peremes sokaságot kapunk akkor is, ha egy tetszőleges sokaságból elhagyjuk egy beágyazott zárt golyó belső részét.

12.1.8. definíció. Az X sokaságot *zártnak* hívjuk, ha kompakt és nincs pereme. Egy X peremes sokaság *belső részének* nevezzük és BrX-szel jelöljük X azon pontjainak halmazát, melyeknek létezik az euklideszi térrel homeomorf környezetük. $X \setminus BrX$ az X *pereme*, melyet ∂X jelöl, ∂X pontjai pedig X *perempontjai*.

12.1.9. megjegyzések. **(a)** ∂X <u>nem</u> definiálható úgy, mint azon pontok halmaza, melyeknek létezik a féltérrel homeomorf környezetük, hiszen például $\mathbb{R}^n_+$-ban minden pontnak létezik a féltérrel homeomorf környezete, nevezetesen az egész tér.
(b) Triviális, hogy BrX sokaság.

12.1.10. állítás. $\partial X = \{x \in X \mid \exists (U_x, \varphi_x)$ *hogy* $\varphi : U_x \to \mathbb{R}^n_+$ *homeomorfizmus és* $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n_+\}$.

Bizonyítás (első). $x \in \partial X$ pontosan akkor, ha x-nek nem létezik euklideszi környezete. Ekkor létezik a féltérrel homeomorf környezete, és ha a homeomorfizmus x-et nem a határoló hipersíkra képezné, akkor x-nek mégis lenne $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf környzete.
(második) Tegyük fel, hogy x-nek létezik egy olyan U_x környezete, melyre létezik egy $\varphi : U_x \to \mathbb{R}^n_+$ homeomorfizmus amire $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Be kell látnunk, hogy x-nek nem létezik $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf környezete. Ezt csak $n = 2$-re látjuk be. (Nagyobb n-ekre a magasabb dimenziós homotópia csoportokat kell alkalmaznunk, $n = 1$-re pedig házi feladat.) Tegyük fel tehát, hogy x-nek létzik $\mathbb{R}^2$-tel homeomorf környezete. Ekkor létezik ilyen környezetekből álló bázisa is, legyen ez $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_k \supset \ldots$. Minthogy létezik x-nek a félsíkkal homeomorf olyan környezete is, melyben x a határoló egyenes egy pontjának felel meg, létezik ilyen környezetekből álló bázis is az x pontban, legyen ez $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$. Ekkor $\pi_1(U_i \setminus \{x\}) = 0, \pi_1(V_j \setminus \{x\}) = \mathbb{Z}$ és a $V_j \subset V_{j-1}$ beágyazás egy $\pi_1(V_j \setminus \{x\}) \to \pi_1(V_{j-1} \setminus \{x\})$ izomorfizmust indukál. Mivel bázisokat vettünk, V_1-ben létezik egy U_i környezet, ebben pedig egy V_j. Tekintsük a

$$V_j \setminus \{x\} \subset U_i \setminus \{x\} \subset V_1 \setminus \{x\}$$

leképezések által a fundamentális csoportok között indukált leképezéseket. Azt kapjuk, hogy a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ izomorfizmus átvezethető a triviális csoporton, ami nyilván ellentmondás. $\square$

12.1.11. következmény. *Ha X és Y peremes sokaságok, és $f : X \to Y$ egy homeomorfizmus, akkor $f(\partial X) = \partial Y$ és $f(BrX) = BrY$.* $\square$

12.1.12. következmény. *Ha X egy peremes n-dimenziós sokaság, akkor ∂X egy $n-1$ dimenziós sokaság.* $\square$

Természetesen felvetődő kérdés, hogy van-e minden zárt X sokasághoz olyan kompakt peremes sokaság, melynek ő a pereme ? (Ha elhagyjuk a kompaktság követelményét akkor a kérdés triviális: M^{n-1} pereme az $M^{n-1} \times \mathbb{R}^1_+$ szorzatnak.)

Ha X^p peremes p-dimenziós sokaság, Y^q topologikus q-sokaság, akkor $X^p \times Y^q$ peremes $p+q$-sokaság, melynek pereme $\partial X \times Y$-vel egyenlő. Legyenek most X, Y peremes sokaságok. Ekkor $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y \cup X \times \partial Y$, ugyanis $X = BrX \cup \partial X$, $Y = BrY \cup \partial Y$ és $BrX \times BrY \subset Br(X \times Y)$, $BrX \times \partial Y \subset \partial(X \times Y)$, $\partial X \times BrY \subset \partial(X \times Y)$ valamint $\partial X \times \partial Y \subset \partial(X \times Y)$. Következésképp $\partial(X \times Y)$ megegyezik az utolsó három szorzat egyesítésével.

12.1.13. állítás. *Topologikus sokaság metrizálható.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy X kompakt. Korábbiak szerint T_2 és kompakt $\Longrightarrow T_4$ és $T_4 + M_2 \Longrightarrow$ metrizálható. Az általános esetet csak vázoljuk: T_2 és lokálisan kompakt $\Longrightarrow T_3$; $T_3 + M_2 \Longrightarrow T_4$; végül $T_4 + M_2 \Longrightarrow$ metrizálható. □

12.2 1-dimenziós sokaságok osztályozása

12.2.1. tétel. *(a) Legyen M^1 1-dimenziós, összefüggő, kompakt sokaság. Ekkor $M^1 \sim S^1$ (itt $\sim$ a homeomorfizmus jele).*
(b) Legyen M^1 1-dimenziós, összefüggő, kompakt peremes sokaság. Ekkor $M^1 \sim [0,1]$.
(c) Legyen M^1 1-dimenziós, összefüggő, nem kompakt sokaság. Ekkor $M^1 \sim \mathbb{R}^1$.
(d) Legyen M^1 1-dimenziós, összefüggő, nem kompakt peremes sokaság. Ekkor $M^1 \sim \mathbb{R}^1_+ = [0,\infty)$.

Alább csak (a)-t fogjuk bizonyítani. A bizonyítás a következő lemmán alapul.

12.2.2. lemma. *Legyen X egy Hausdorff és összefüggő tér, $X = A \cup B$, A, B nyílt része X-nek, továbbá $A, B \sim \mathbb{R}^1$. Ekkor X vagy $\mathbb{R}^1$-gyel vagy S^1-gyel homeomorf.*

Bizonyítás (12.2.1 tételé). Legyen $M^1 = U_1 \cup \ldots \cup U_n$, ahol minden U_i nyílt $\mathbb{R}^1$-gyel homeomorf. A bizonyítást n szerinti indukcióval végezzük.
$n = 1$: Ekkor $M^1 = U_1 \sim \mathbb{R}^1$, ám M^1 kompakt. Tehát ilyen eset nincs.
$n = 2$: $M^1 = U_1 \cup U_2$, így a 12.2.2 lemma szerint $M^1 \sim \mathbb{R}^1$ vagy S^1. Mivel M^1 kompakt, ezért $M^1 \sim S^1$.
Az indukciós lépés: Tegyük fel, hogy az állítás igaz ha M^1 $n-1$ darab $\mathbb{R}^1$-gyel homeomorf nyílt halmazzal van lefedve. Legyen most $M^1 = U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Biztosan létezik két nem diszjunkt környezet, minthogy M^1 összefüggő. Feltehetjük, hogy az első kettő az, vagyis $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Legyen $V = U_1 \cup U_2$. A lemma szerint $V \sim \mathbb{R}^1$ vagy $V \sim S^1$. Az utóbbi esetben V nyílt is és zárt is M^1-ben (zárt, mert kompakt és M^1 Hausdorff). Mivel M^1 összefüggő, ezért ekkor $M^1 = V$, vagyis $M^1 \sim S^1$. Ha pedig $V \sim \mathbb{R}^1$, akkor $M^1 = V \cup U_3 \cup \ldots \cup U_n$, vagyis M^1 előáll $n-1$ darab $\mathbb{R}^1$-gyel homeomorf nyílt halmaz egyesítéseként. Ezért az indukciós feltevés szerint $M^1 \sim S^1$, amivel a tétel bizonyítása kész. □

Bizonyítás (12.2.2 lemmáé). Legyen K az $A \cap B$ egy összefüggőségi komponense. Ekkor K nyílt (esetleg végtelen) intervallum $A \sim \mathbb{R}^1$-ben is és $B \sim \mathbb{R}^1$-ben is. (Valóban, az $A \cap B$ halmaz egy nyílt részhalmaz A-ban is és B-ben is. Egy $\mathbb{R}^1$-beli nyílt halmaz minden pontjának létezik útösszefüggő környezete, tehát az (út)összefüggőségi komponensek nyíltak.) Tehát a K halmaz A-ban a következők valamelyike lehet:

$$(a,b), (-\infty,b), (a,\infty), (-\infty,\infty);$$

hasonló teljesül B-ben is. Nézzük meg mely esetek fordulhatnak elő együtt. Feltehető, hogy $K \neq (-\infty,\infty)$ sem A-ban, sem B-ben. Ekkor ugyanis $K = A$ illetve $K = B$ lenne, és ekkor $A \subset B$ vagy $B \subset A$ és így $A \cup B = A$ vagy B, s így $A \cup B = \mathbb{R}^1$ következne, amivel a bizonyítás megvan.

Ha K-nak van egy véges határpontja például A-ban és a_n egy monoton ehhez tartó K-beli sorozat, akkor ugyanezen sorozat B-ben nem bírhat véges határértékkel (mert akkor $A \cup B$ nem Hausdorff), ám ez a sorozat B-ben is monoton, tehát ott végtelenhez kell hogy tartson. Hasonló igaz természetesen, ha az A és B szerepét felcseréljük. Így K csakis félegyenes lehet mindkét halmazban, éspedig az A-beli véges határponthoz a B-beli végtelen tartozik és fordítva. Ezért $A \cap B$ komponeneseinek a száma csak 1 vagy 2 lehet. Az első esetben $\mathbb{R}^1$-et kapunk a két egyenes összeragasztásával, a másodikban pedig S^1-et. □

12.3 Feladatok

1. [2] Lássuk be, hogy $S^p \times S^q$ nem homeomorf S^{p+q}-val.
2. Lássuk be, hogy a Klein kancsó pereme egy kompakt 3-sokaságnak.
3. (Most még nehéz:) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{RP}^2$ nem pereme semmilyen kompakt peremes 3-dimenziós sokaságnak.
4. Legyen M zárt n-dimenziós sokaság és $p \in M$. Lássuk be, hgy $M - \{p\}$ egy $(n-1)$-sokasággal homotóp ekvivalens.
5. Lássuk be, hogy $\mathbb{RP}^2$ nem ágyazható be $\mathbb{R}^3$-ba.
6. Igazoljuk, hogy egy zárt, egyszeresen összefüggő sokaság nem tartalmazhat 1-kodimenziójú zárt, páratlan Euler karakterisztikájú részt.
7. Lássuk be, hogy a $O(n)$, $SO(n)$, $GL(n;\mathbb{R})$ topologikus csoportok sokaságok. Számítsuk ki dimenzióikat.
8. Bizonyítsuk be, hogy ha az M^3 zárt sokaság egyszeresen összefüggő, akkor homotopikusan ekvivalens az S^3 gömbbel.

[2] Ezen a ponton még nehéz. Remélhetőleg a kurzus végeztével már könnyű.

13. fejezet

Kétdimenziós sokaságok

13.1 Kétdimenziós sokaságok osztályozása

Valójában már korábban megismerkedtünk minden zárt 2-dimenziós sokasággal, hiszen

13.1.1. alaptétel. *Minden zárt összefüggő kétdimenziós sokaság a kanonikus felületek közül pontosan eggyel homeomorf.*

A következőkben mi a kicsit gyengébb 13.1.4 tételt fogjuk csak belátni, ennek megértéséhez azonban egy definícióra van szükségünk.

13.1.2. definíció. Legyen $N > p$ és legyenek $a_0, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^N$ pontok általános helyzetben (tehát nincsenek benne semmilyen p-nél kisebb dimenziós affin altérben). Ezen pontok konvex burkát *p-dimenziós szimplexnek* nevezzük. Az $a_0, a_1, \dots, a_p$ pontok a szimplex *csúcsai*, a csúcsok egy részhalmazának konvex burka pedig a szimplex egy *lapja*. Az $(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)$ pontok konvex burkát *standard szimplexnek* hívjuk.

(Véges) szimpliciális komplexusnak nevezzük olyan $\mathbb{R}^N$-beli szimplexek (véges) halmazát, melyekre bármely két szimplex metszete lapja mindkettőnek (ha nem üres). Ezen szimplexek egyesítését az adott szimpliciális komplexus *testének* nevezzük. Azt mondjuk, hogy egy topologikus tér *poliéder*, ha teste valamilyen szimpliciális komplexusnak. Egy X topologikus tér *triangulálása* alatt X és egy szimpliciális komplexus teste közötti homeomorfizmust értünk.

13.1.3. állítás. *Minden zárt felület triangulálható.* $\square$

Mi a következő tételt fogjuk belátni. (Ebből — a 13.1.3 állítást elfogadva — már adódik a 13.1.1 alaptétel.)

13.1.4. tétel. *Minden triangulált zárt két dimenziós sokaság homeomorf a kanonikus felületek valamelyikével.*

13.1.5. megjegyzés. Azt már tudjuk, hogy a kanonikus felületek páronként nem homeomorfak, következésképp egy triangulált zárt felület csak egy kanonikus felülettel lehet homeomorf.

13.1.6. definíció. Egy felület triangulációját (vagy háromszögelését) *erősen összefüggőnek* nevezzük, ha a trianguláció tetszőleges Δ_0 háromszögére a trianguláció minden további Δ háromszögéhez létezik a háromszögeknek egy olyan $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n = \Delta$ véges sorozata melyre a $\Delta_i \cap \Delta_{i+1}$ metszet egy oldallal egyezik meg $(i = 0, 1, \dots, n-1)$. A háromszögelés *el nem ágazó* ha minden 1-dimenziós szimplex pontosan két háromszögnek az oldala.

13.1.7. lemma. *Egy felület triangulációja erősen összefüggő és nem elágazó.*

Bizonyítás. Legyen Δ_0 a felület triangulációjának egy háromszöge. Legyen A a Δ_0-ból elérhető háromszögek halmaza és jelölje B a többi háromszöget. Legyen $|A|$ az A-beli háromszögek uniója és $|B|$ a B-belieké. Ekkor az $|A| \cap |B|$ metszet a trianguláció szimplexeiből áll. Könnyű látni, hogy ezen szimplexek között nem lehet háromszög, mert akkor ez el is érhető Δ_0-ból meg nem is. E metszetben nem lehet oldal sem, mert akkor ez egy Δ_0-ból elérhető és egy onnan el nem érhető háromszögnek lenne a közös oldala, ám akkor az el nem érhető is elérhető lenne. Legyen végül a metszetben egy P csúcs. Tekintsük a P csúcsú A-beli háromszögeket. Ezek egyesítése véges sok körlap P-ben összeragasztva. Hasonlóan a B-beliek. Ha P-ben egynél több körlap lenne összeragasztva, akkor nem létezne $\mathbb{R}^2$-vel homeomorf környezete. A fentiek alapján ehát $|A| \cap |B| = \emptyset$, ám ez csak úgy lehet, ha ezek egyike üres, mert különben a felület nem lenne összefüggő. Ilymódon tehát beláttuk azt, hogy a trianguláció erősen összefüggő.

A nem elágazóság bizonyításához azt kell belátni, hogy minden 1-dimenziós szimplex pontosan két háromszögnek az oldala. Nulla darab háromszögnek egy adott él nem lehet oldala, mert az oldal belső pontjainak nem lenne síkkal homeomorf környeztük. Egynek szintén nem lehet, mivel minden belső pontnak lenne akármilyen kicsi olyan környezte, hogy abból e pontot kidobva a lyukas környezet egyszeresen összefüggő maradna. Tegyük fel tehát, hogy az adott él három vagy annál több háromszögnek lenne oldala. Ekkor minden P belső pontjának lenne olyan szűkülő U_i környezetbázisa, hogy a P pontot mindegyikből elhagyva körvonalak csokrával homotop ekvivalens terek maradnak vissza (a körvonalak száma legalább kettő). Ezek fundamentális csoportja F_n, ahol n a körök száma, és ha U és U' két eleme e környezetbázisnak valamint $U \subset U'$, akkor e beágyazás izomorfizmust indukál $U \setminus P$ és $U' \setminus P$ fundamentális csoportjai között. Ugyanakkor a P-nek létezik $\mathbb{R}^2$-vel homeomorf V_i környezetekből álló környezetbázisa is. Ezen környezetekből P-t elhagyva a maradék fundamentális csoportja $\mathbb{Z}$ lesz. Válasszunk egy U_i környezetet, ebben egy V_j-t, abban pedig egy U_k-t. Ekkor a $\pi_1(U_k \setminus P) \approx F_n \to \pi_1(U_i \setminus P) \approx F_n$ izomorfizmus átvezethető a $\mathbb{Z} \approx \pi_1(V_j \setminus P)$ csoporton, ami $n \geq 2$ miatt ellentmondás. Ilymódon a lemma bizonyítása kész. □

13.1.8. definíció. Véges sok (összesen páros sok oldallal rendelkező) sokszöget *sokszögcsaládnak* hívunk, ha az oldalak párokba vannak állítva és az egy párba tarozó oldalak között adott egy (lineáris) homeomorfizmus.

13.1.9. példák. **(a)** Egy felület háromszögelése példát ad sokaszögcsaládra.
(b) A kanonikus felületeket megadó sokszög is sokaszögcsalád (hiszen az oldalak párokba vannak rendezve); ezt kanonikus sokszögcsaládnak nevezzük.

13.1.10. definíció. Egy sokszögcsalád *elemi átalakításának* nevezzük az alábbi négy művelet valamelyikét:
(1) *1-dimenziós finomítás:* Egy oldalpáron felveszünk egy egymásnak megfelelő pontpárt.
(2) *1-dimenziós egyszerűsítés:* Az előző művelet fordítottja.
(3) *2-dimenziós finomítás:* Egy sokszöget szétvágunk és a vágásnál keletkező két élt párba állítjuk, a homeomorfizmusnak pedig a vágás előtt egybeeső pontok egymásnak való megfeleltetését választjuk.
(4) *2-dimenziós egyszerűsítés:* Az előző fordítottja.

13.1.11. megjegyzés. Minden sokszögcsalád egy topologikus teret ad meg: a sokszögek diszjunkt uniójában azonosítsuk az egy párba tartozó oldalak egymásnak megfelelő pontjait. Könnyen belátható, hogy az elemi átalakítások nem változtatják meg a sokszögcsaládhoz így hozzárendelt topologikus teret.

13.1.12. állítás. *Minden háromszögelt összefüggő felülettől, mint sokszögcsaládtól elemi átalakításokkal eljuthatunk egy kanonikus sokszögcsaládhoz.*

Bizonyítás. A bizonyítást több lépésben végezzük.
(0) 2-dimenziós egyszerüsítésekkel (minthogy a háromszögelés erősen összefüggő) elérhető, hogy a sokszögcsaládban egyetlen sokszög legyen. A sokszög peremén a ragasztások (azaz a homeomorfizmusok) a következőképpen kódolhatók egyetlen szóval: irányítsuk az oldalakat úgy, hogy az oldalak közti homeomorfizmusok irányítástartók legyenek. Minden oldalpárhoz egy betűt rendelünk (különböző párokhoz különböző betűt). Az adott betűt az oldalpár mindkét tagjához $+1$ vagy -1 kitevővel rendeljük hozzá, attól függően, hogy a sokszög pozitív körüljárása által indukált irányítás megegyezik-e avagy ellentétes az oldalon választott irányítással.
(1) Ha ugyanaz a betű egymás mellett szerepel a kapott szóban $+1$ és -1 kitevővel (és van még más betű is a szóban, tehát nem ez a teljes szó), akkor lehet egyszerűsíteni. Valóban, legyen a szó $\dots aa^{-1} \dots$ és legyen P az a és a^{-1} jelű oldalak közös csúcsa. Egy sokszögbeli szakasz segítségével kössük össze P-t bármelyik vele nem

szomszédos csúccsal, és vágjuk szét a sokszöget ezen szakasz mentén (ez egy 2-dimenziós finomítás). Jelöljük x-szel a keletkező új oldalpárt. Az $x^{\pm 1}$ és $a^{\pm 1}$ oldalak közti csúcsok elhagyásával egy 1-dimenziós egyszerűsítést hajtunk végre, és az $x^{\pm 1}$ és $a^{\pm 1}$ oldalak helyett egy $y^{\pm 1}$ jelű oldalpár jelenik meg. Ezen oldalpár mentén a kapott két sokszöget összeragasztva — vagyis egy 2-dimenziós egyszerűsítést végrehajtva — visszajutunk csaknem az eredeti állapotba, az egyetlen különbség az lesz, hogy a szó már nem tartalmazza az aa^{-1} betűpárt. Ezt a procedurát minden további lépés után is végrehajtjuk, hacsak lehetséges.

A sokszög peremén az oldalakat a szó által előírt módon összeragasztva bizonyos csúcsok is oösszeragadnak. Nevezzük az így összeragadó csúcsokat egy csúcsosztályba tartozóknak.

(2) Elérjük, hogy egyetlen csúcsosztály legyen. Tegyük fel, hogy létezik két nem ekvivalens csúcs. Ekkor létezik két szomszédos nem ekvivalens csúcs is, jelöljük ezeket X-szel és Y-nal. Csökkenteni fogjuk az Y-nal ekvivalens csúcsok számát úgy, hogy közben nem jön létre új csúcsosztály; végül Y csúcsosztálya el fog fogyni. Legyen Y másik (azaz X-től különböző) szomszédja Z és legyen $Y'Z'$ az YZ oldal párja. (Ez biztosan nem az YX oldal, mert akkor $Y = Y'$ és $Z' = X$ esetén kapnánk egy aa^{-1} betűpárt a szóban. $Y' = X$ pedig nem állhat fenn, mert X és Y nem ekvivalensek.) Vágjuk le az XYZ háromszöget (2-dimenziós finomítás) és ragasszuk vissza a fennmaradó sokszöghöz az YZ és $Y'Z'$ oldalak azonosításával (2-dimenziós egyszerűsítés). Így az Y-nal ekvivalens csúcsok száma valóban eggyel csökkent. (Kérdés maradt még, hogy hogyan csökken az Y-nal ekvivalens csúcsok száma egyről nullára, hiszen ezen eljárás feltételezte, hogy van két különböző csúcs az Y csúcsosztályában. A válasz: aa^{-1} típusú részszó kihúzásával.) Vegyük észre, hogy miközben az egyik csúcsosztály (az Y) elemszámát csökkentettük, aközben a másik, nevezetesen az X csúcsosztály elemszámát növeltük.

(3) A szalagok kiválasztása. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan oldalpár, mely a ragasztást kódoló szóban mindkétszer ugyanazon kitevővel szerepel. Tehát a szó így néz ki: $\dots a \dots a \dots$. Ekkor elérhető, hogy ezek egymás mellé kerüljenek, azaz a szó $\dots bb \dots$ alakú lesz. Valóban, kössük össze az a jelű oldalak kezdőpontjait egy sokszögön belül szakasszal, majd vágjuk szét ennek mentén a sokszöget (2-dimenziós finomítás), végül ragasszuk össze a kapott két sokszöget az a jelű oldalak mentén.

(4) A fülek (vagy fogantyúk) kiválasztása. Ha még nem vagyunk kész (vagyis még nem jutottunk egy kanonikus $a_1a_1a_2a_2\dots a_qa_q$ alakú szóhoz), akkor létezik még olyan oldalpár, hogy a nekik megfelelő betűk különböző kitevővel szerepelnek, azaz a szó ilyen alakú: $\dots a \dots a^{-1} \dots$. Ekkor létezik olyan oldalpár — legyen ennek jele b — hogy az ezen párba tartozó két oldal el van választva az a jelű oldalak által. Valóban, ellenkező esetben egynél több csúcsosztály lenne. Ekkor a b jelű oldalpár kitevői szükségképpen ellentétesek (hiszen ha egyformák lennének, akkor már az előző lépésben egymás mellé kerültek volna). Most vágjuk szét a sokszöget a b jelű oldalak egymásnak megfelelő csúcsait összekötő szakasz mentén — a keletkező új szakaszpár jele legyen x —, majd ragasszuk össze a kapott két sokszöget az a jelű oldalak mentén. Végül az x jelű oldalpár egymásnak megfelelő csúcsait összekötő szakasz mentén újra szétvágva és a b jelű oldalak mentén összeragasztva kapunk egy $xyx^{-1}y^{-1}$ alakú szórészletet. Ez pedig éppen egy fogantyú (azaz lyukas tórusz).

(5) Ha létezik szalag, akkor minden fül kicserélhető két szalagra. Valóban, legyen a szó $\dots aa \dots xyx^{-1}y^{-1} \dots$ alakú és legyen P az a jelű oldalak közti csúcs és Q az y és x^{-1} oldal közti csúcs. A PQ szakasz mentén szétvágva és az a oldalak metén összeragasztva három olyan oldalpárt kapunk, melyekben a kitevők egyenlőek. Ebből pedig már a korábbiak szerint ki tudunk választani három szalagot. Mivel minden lépésben csak elemi átalakításokat végeztünk, az állítást igazoltuk. □

Arra, hogy miért lehet egy fogantyút két szalagra kicserélni (ha van legalább egy szalag), egy másik, szemléletes magyarázatot is vázolunk — részben feladatok formájában.

13.1.13. definíció. Hagyjunk el két felületből egy-egy kis körlapot, s a kapott peremes felületeket ragasszuk össze peremvonalaik egy homeomorfizmusa segítségével. Az eredményt a két (F_1 és F_2) felület *összefüggő uniójának* hívjuk és $F_1\#F_2$-vel jelöljük.

Ha most a felületen van Möbius szalag, akkor az egyik lyukat azon végigfuttatva láthatjuk, hogy ugyanezt a felületet kapjuk akkor is, ha a hajlított cső két végét a lyukak pereméhez átellenes oldalakról ragasztjuk. Ez viszont éppen annak felel meg, hogy a felülethez egy lyukas Klein kancsót ragasztunk. [1]

[1] Annak, hogy a csövet egyoldalról vagy ellentétes oldalakról ragasztjuk, valójában nincs értelme. Ennek csak akkor van értelme, ha a felületet $\mathbb{R}^3$-ban elhelyezve képzeljük el. Precízen itt peremkörök irányításait megtartó illeve megfordító ragasztásokról kellene beszélni.

13.1.14. definíció. Legyen X egy véges CW-komplexus és jelölje c_i az i-dimenziós cellák számát. Ekkor a $\sum(-1)^i c_i$ összeget az X CW-komplexus *Euler karakterisztikájának* nevezzük és $\chi(X)$-szel jelöljük.

13.1.15. tétel. *Az Euler karakterisztika topologikus, sőt homotopikus invariáns.* □

Ezt a tételt itt csak triangulált zárt felületekre bizonyítjuk. (Az általános eset bizonyítását lásd az Algebrai és Differenciáltopológia sávban.)

13.1.16. állítás. *Ha F_1 és F_2 két homeomorf triangulált felület, akkor $\chi(F_1) = \chi(F_2)$.*

Bizonyítás. Egy triangulált (vagy akármilyen sokszögcsalád egyesítéseként előállított) F felületre $\chi(F)$ definíció szerint a "csúcsok száma − élek száma + lapok száma" összeggel egyenlő. Vegyük észre, hogy az elemi átalakítások nem változtatják meg az Euler karakterisztikát. Az F_1 felület triangulációja elemi átlakításokkal egy K_1 kanonikus sokszögcsaládba vihető át, hasonlóan F_2 egy K_2-be. Mivel F_1 és F_2 homeomorfak így K_1 és K_2 is azok, ám ez csak úgy lehet, ha megegyeznek, tehát $\chi(F_1) = \chi(K_1) = \chi(K_2) = \chi(F_2)$. □

Érdemes megjegyezni, hogy $\chi(A_p) = 2 - 2p$ és $\chi(A'_q) = 2 - q$.

13.1.17. megjegyzés. Egy felület Euler karakterisztikája és irányíthatósága egy teljes invariánsrendszer, azaz két zárt felület pontosan akkor homeomorf, ha mind az Euler karakterisztikájuk, mind az irányíthatóságuk megegyezik. Ez utóbbit (az irányíthatóságot) alább definiáljuk, de a szemléletes jelentése a következő: egy felület pontosan akkor irányítható, ha nem tartalmaz Möbius szalagot. Így az A_p felületek irányíthatók, az A'_q felületek viszont nem.

13.1.18. definíció. Egy él *irányításán* a csúcsai sorrendjének egy rögzítését értjük. Egy háromszög *irányítása* pedig a csúcsainak egy ciklikus sorrendje. Egy háromszög irányítása az élein egy irányítást indukál. Egy triangulált felületen két háromszög irányítását illeszkedőnek mondjuk, ha vagy nincs közös élük, vagy a közös élen ellentétes a két háromszög által indukált irányítás. Egy triangulált felület *irányítható*, ha létezik a trianguláció összes háromszögének egyidejű illeszkedő irányítása. A háromszögek egy ilyen egyidejű illeszkedő irányítását nevezzük a felület *irányításának*. Világos, hogy ha a felület összefüggő, akkor vagy nulla vagy pontosan két irányítása van.

13.1.1 A felületek osztályozásának szemléletes bizonyítása (Fomenko nyomán)

Legyen M^2 egy triangulált felület. Tekintsük minden csúcs egy kis 2ε környezetét; nevezzük ezeket körlapoknak. Az élek ε környezetét pedig nevezzük szalagoknak (ezek összekötik a körlapokat). A háromszögeknek az előbbi halmazokba nem eső részeit pedig foltoknak (vagy tapaszoknak) hívjuk. Legyen k a körlapok, l a szalagok és t a tapaszok száma. Ez esetben azt mondjuk, hogy az M^2 felületnek egy $F(k, l, t)$ alakú felbontása van megadva.

Legyen K_1 és K_2 két különböző körlap és L egy őket összekötő szalag. Ekkor a $K = K_1 \cup L \cup K_2$ halmaz egy körlappal homeomororf altér. Elhagyjuk tehát a K_1, K_2 körlapokat és az L szalagot és helyettük tekintjük a K körlapot; ilymódon eggyel csökkentettük a körlapok és a szalagok számát. Hasonlóan ha T_1 és T_2 két tapasz, melyeket egy L szalag elválaszt, akkor a $T = T_1 \cup L \cup T_2$ egy új tapasz. Ilymódon eggyel csökkentettük a tapaszok és a szalagok számát.

13.1.19. lemma. *A fenti módszerrel végül az eredeti M^2 felületenek egy $F(1, n, 1)$ alakú felbontásához jutunk.*

13.1.20. lemma. *Ha minden szalag irányítható módon van az egyetlen körlaphoz ragasztva (azaz a körlap és az adott szalag egyesítése a hengerrel és nem a Möbius szalaggal homeomorf), akkor a szalagok száma szükségképpen páros és a felület homeomorf egy A_p felülettel.*

13.1.21. lemma. *Ha létezik legalább egy csavart (azaz nem irányítható) módon ragasztott szalag, akkor feltehető, hogy valamennyi szalag csavart módon ragasztott. Ekkor a felület A'_n-nel homeomorf.*

Alább csak a 13.1.19 lemma bizonyítását adjuk meg.

Bizonyítás (13.1.19 lemma). Precízebben leírva a következőt csináljuk: A háromszögelés 1-váza egy összefüggő gráf. Ennek vesszük F_1 feszítő fáját. (Ennek mentén fogjuk a körlapokat összeolvasztani egyetlen körlappá.) Vegyük a duális gráfot és ebből hagyjuk el azon éleket, melyeket F_1 metsz. A maradék egy összefüggő G gráf lesz. (Valóban, F_1 komplementuma pontosan akkor összefüggő, ha a duális felbontás 1-váza összefüggő, azaz G összefüggő. Ám $M^2 \setminus F_1$ összefüggő, mert homeomorf $M^2 \setminus U_\varepsilon(F_1)$-nel, márpedig $U_\varepsilon(F_1)$ homeomorf egy körlappal. Ha viszont egy körlap odaragasztásával összefüggő teret kapunk egy térből (mint az $M^2 \setminus U_\varepsilon(F_1)$-ből az M^2-et) akkor az eredeti tér is összefüggő volt, és jelen esetben $M^2 \setminus U_\varepsilon(F_1)$ összefüggő.) Tekinthetjük tehát a G gráf F_2 feszítő fáját. Ennek mentén fogjuk a tapaszokat összeolvasztani. Végeredményben tehát az F_1 fa kis 2ε környezete lesz az egyetlen körlap; a szalagok azon élek ε környezetei lesznek , melyek diszjunktak mindkét fától, végül az egyetlen tapasz az előzőek komplementuma lesz, és ennek deformációs retraktuma az F_2 fa. $\square$

13.2 Magasabb dimenziós sokaságok osztályozása

El[̋O]ször is megjegyezzük, hogy az irányítás magasabb dimenziós triangulált sokaságokra is definiálható:

13.2.1. definíció. Azt mondjuk, hogy egy n-dimenziós szimplex csúcsainak két különböző sorrendje a szimplex ugyanazon irányítását definiálja, ha az áttérés az egyikről a másikra a csúcsoknak egy páros permutációjával valósítható meg. Tovább pedig minden (indukált irányítás a maximális dimenziós valódi lapokon, triangulált n-dimenziós sokaság irányítása) ugyanúgy definiálható, mint 2-dimenzióban.

A magasabb dienziós sokaságok osztályozására ťreve megmutatjuk először, hogy $n \geq 4$ dimenzióban az n-dimenziós zárt sokaságok osztályozására nincs remény. Ismeretes ugyanis a következő algoritmuselméleti tétel:

13.2.2. tétel. *Nem létezik olyan algoritmus, mely bármely két véges csoportprezentációról eldönti, hogy izomorf csoportokat adnak-e ezek vagy sem.* $\square$

Ugyanakkor igaz az, hogy minden $n \geq 4$ természetes számhoz és minden S véges csoporthoz megépíthető egy $M^n(S)$ n-dimenziós sokaság úgy, hogy $M^n(S)$ pontosan akkor homeomorf $M^n(T)$-vel, ha S izomorf T-vel. Mi a következő (gyengébb) tételt látjuk be:

13.2.3. tétel. *Minden $n \geq 4$ természetes számhoz és minden G végesen prezentált csoporthoz létezik olyan zárt n-dimenziós sokaság, melynek fundamentális csoportja az adott csoport.*

A tétel bizonyítása előtt egy kis előkészítésre van szükségünk.

13.2.4. definíció. Legyen M_1, M_2 két n-dimenziós sokaság. Hagyjunk el mindegyikből egy-egy nyílt n-dimenziós golyót, és a kapott S^{n-1} peremeket egy (a golyókra kiterjedő) függvénnyel azonosítsuk. A kapott n-dimenziós sokaságot M_1 és M_2 *összefüggő összegének* nevezzük és $M_1\#M_2$-vel jelöljük.

13.2.5. lemma. *Ha M_1^n és M_2^n n-dimenziós, zárt sokaságok, $n \geq 3$, $\pi_1(M_1^n) \approx G_1$ és $\pi_1(M_2^n) \approx G_2$ akkor $\pi_1(M_1^n\#M_2^n) \approx G_1 * G_2$ (a G_1 és G_2 csoportok szabad szorzata).*[2]

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Van Kampen tételt az $M_1\#M_2 = (M_1 \setminus D^n) \cup_{S^{n-1}} (M \setminus D^n)$ felbontására. (Fontos, hogy $n \geq 3$.) $\square$

Bizonyítás (13.2.3 tételé). Ha a megadott csoportra $G \cong \mathbb{Z}$ teljesül, akkor $M^n = S^1 \times S^{n-1}$ megfelel. A 13.2.5 lemma alapján így minden végesen generált szabad csoport megkapható, mint egy zárt n-dimenziós sokaság fundamentális csoportja; ehhez csupán megfelelő számú $S^1 \times S^{n-1}$ összefüggő unióját kell venni. Legyen tehát $M_k = S^1 \times S^{n-1}\# \dots \#S^1 \times S^{n-1}$ (k darab $S^1 \times S^{n-1}$ összefüggő uniója); ekkor $\pi_1(M_k) \approx F_k$, ahol F_k a k elem által generált szabad csoport.

[2]Emlékeztető: A $G_1 * G_2$ szabad szorzat prezentációját úgy kaphatjuk meg a G_1 és G_2 prezentációiból, hogy egyesítjük a G_1 és G_2 generátorait (ez lesz $G_1 * G_2$ generátorrendszere) és relációit — ez lesz a $G_1 * G_2$-ben a relációk halmaza.

Legyen most egy csoport-prezentáció k generátorral és az $r_1,\dots,r_l$ relációkkal megadva. Legyenek $\gamma_1,\dots,\gamma_l$ zárt, diszjunkt, sima görbék M_k-ban, melyek homotópiaosztályai rendre az $r_1,\dots,r_l$ $\pi_1(M_k)$-beli elemekkel egyenlők. Ezen görbék kis környezete $U_{\gamma_i} = S^1 \times D^{n-1}$ alakú. Ha ezen környezeteket kidobjuk, akkor a fundamentális csoport nem változik. (Alkalmazzuk a Van Kampen tételt. Itt már fontos, hogy $n \geq 4$.) Ha most minden $\partial U_{\gamma_i} = S^1 \times S^{n-1}$ peremkomponenshez hozzáragasztunk egy $D^2 \times S^{n-1}$ peremes sokaságot a perem identikus azonosításával, akkor éppen egy olyan zárt sokaságot kapunk, melynek fundamentális csoportja a kívánt prezentációval bír. □

Mi a helyzet 3-dimenzióban? Itt már nem áll elő minden csoport, mint fundamentális csoport, például nem létezik olyan zárt 3-dimenziós sokaság, melynek fundamentális csoportja $\pi_1(M^3) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

13.2.6. megjegyzés. Minden 3-dimenziós sokaság fundamentális csoportjának létezik olyan prezentációja, melyben a generátorok és a relációk száma megegyezik.

Valójában még a 3-dimenziós egyszeresen összefüggő sokaságokat sem tudjuk osztályozni. Erről szól a Topológia egyik leghíresebb megoldatlan problémája, az ú.n. *Poincaré sejtés.*

13.2.7. sejtés. (Poincaré sejtés) *Legyen M^3 zárt, egyszeresen összefüggő 3-dimenziós sokaság. Ekkor M^3 homeomorf az S^3 gömbbel.*

E máig megoldatlan sejtésben az a legmeglepőbb, hogy (megfelelő) általánosítása minden más dimenzióban be van bizonyítva!

13.2.8. megjegyzés. Egy egyszeresen összefüggő zárt 3-dimenziós sokaságról ismeretes, hogy homotopikusan ekvivalens az S^3 gömbbel.

13.2.9. sejtés. (Általánosított Poincaré sejtés) *Ha az M^n zárt n-dimenziós sokaság homotopikusan ekvivalens az S^n gömbbel, akkor homeomorf is vele.*

Ezt a sejtést $n \geq 5$-re Smale látta be 1960 körül, $n = 4$-re pedig Freedman 1982 körül. (Eredményükért mindketten Fields medált kaptak.)

13.3 Heegaard felbontás

13.3.1. definíció. Tömör p-fogantyúnak nevezzük és B_p-vel jelöljük azt a peremes 3-sokaságot, amit egy D^3 golyóból kapunk, ha a határoló S^2 p darab diszjunkt húrjának kicsiny, diszjunkt ε környezetét elhagyjuk. (Másik leírás: A D^3 golyó peremén kijelölünk p darab körlapot, majd veszünk p darab tömör tóruszt (azaz $S^1 \times D^2$-t) és mindegyiknek a peremén kijelölünk egy-egy körlapot, végül ez utóbbi körlapokat azonosítjuk az előbbiekkel.)

13.3.2. tétel. *Minden zárt, irányítható 3-dimenziós sokaság előáll két homemorf tömör fogantyúnak a peremük mentén való összeragasztával, azaz $M^3 = B_p \cup_{\partial B_p} B_p$.*

13.3.3. definíció. Egy ilyen felbontást az M^3 sokaság (egy) Heegaard felbontásának nevezünk; ez természetesen nem egyértelmű. p az adott felbontás neme (vagy génusza), a minimális génuszú felbontás génusza pedig a 3-sokaság génusza.

13.3.4. megjegyzés. A Poincaré sejtés be van bizonyítva a legfeljebb 2 génuszú sokaságokra.

Bizonyítás (Heegaard felbontás létezése, 13.3.2 tétel). Tekintsük M egy triangulálásában az 1-vázának egy kis környezetét; ez egy B_p lesz. A komplementum a duális felbontás 1-vázának komplementumával homeomorf, így az is egy tömör fogantyú, mondjuk B_q. Ám a peremeik homeomorfak, így $q = p$. (Egy trianguláció duális felbontását úgy képezzük, hogy minden 3-dimenziós szimplexben felveszünk egy csúcsot, és két ilyen csúcsot pontosan akkor kötünk össze, ha a megfelelő 3-szimplexeknek van közös 2-dimenziós lapjuk. Az eredeti trianguláció minden csúcsához hozzárendeljük azt a 3-dimenziós poliédert, melyet azon pontok alkotnak, melyek ehhez a csúcshoz vannak a legközelebb. Ezek lesznek a duális felbontás 3-cellái, ezek lapjai pedig a 2-cellák.) □

13.3.5. tétel. *Legyen M^3 tetszőleges zárt, triangulált 3-dimenziós sokaság. Ekkor $\chi(M^3) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen először M^3 irányítható. Tekintsük a fenti módon a triangulációból megkonstruált Heegaard felbontását, azaz $M^3 = B'_p \cup B''_p$, ahol a B'_p az 1-váz környezete, a B''_p pedig a duáils felbontás 1-vázának a környezete. Ekkor $\chi(\partial B'_p) = 2c_0 - 2c_1$. Hasonlóan $\chi(\partial B''_p) = 2c_3 - 2c_2$. Minthogy $\partial B'_p = \partial B''_p$, ezért $c_0 - c_1 = c_3 - c_2$, azaz $\chi(M^3) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = 0$.

Ha M^3 nem irányítható, akkor létezik őt kétrétűen fedő irányítható sokaság. (Az irányítást meg nem fordító utak homotópia osztályai egy 2 indexű részcsoportot alkotnak a fundamentális csoportban. Az ehhez tartozó fedőtér irányítható lesz.) n-rétű fedésnél az Euler karakterisztika n-nel szorzódik, így az előző eset alapján a bizonyítással készen vagyunk. □

13.3.6. következmény. *Páratlan Euler karakterisztikájú felület nem pereme semmilyen kompakt peremes 3-dimenziós sokaságnak.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $F^2 = \partial V^3$. Legyen $M^3 = V^3 \cup_{F^2} V^3$. Ekkor $0 = \chi(M^3) = 2\chi(V^3) - \chi(F^2)$. (Általában $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.) Tehát $\chi(F^2) = 2\chi(V^3)$, vagyis $\chi(F^2)$ párossága adódik. □

13.3.7. definíció. Két zárt, n-dimenziós sokaság *kobordáns* (vagyis *együtt határoló*), ha létezik olyan kompakt $(n+1)$-dimenziós sokaság, melynek pereme a kettő diszjunkt uniója. Ez egy ekvivalencia reláció, az ekvivalencia osztályok halmazán a sokaságok diszjunkt uniója egy műveletet ad, melyre nézve az csoport lesz. Ezen csoportot *n-dimenziós (topologikus) kobordizmuscsoportnak* hívjuk és $\mathcal{N}_n^{TOP}$-nel jelöljük.

13.4 Feladatok

1. Ragasszunk össze két Möbius szalagot a peremvonaluk mentén. Lássuk be, hogy így egy Klein-kancsóhoz jutunk. (*Útmutatás:* Tekintsük a Klein kancsó szokásos formában lerajzolt ábrájának szimmetriasíkját és vágjuk szét ennek mentén a Klein kancsót.)
2. Számítsuk ki az n-dimenziós (topologikus) kobordizmuscsoportot $n = 0, 1, 2$ esetén.
3. Bizonyítsuk be, hogy B_p jól definiált, azaz topolgikus típusa csak a p-től függ és nem függ a körlapok kiválasztásától illetve az azonosítások módjától.
4. Lássuk be, hogy az összefüggő unió jóldefiniált, azaz az eredmény nem függ a peremeket azonosító homeomorfizmusok megválasztásától.
5. Lássuk be, hogy tetszőleges F felület esetén $S^2 \# F = F$.
6. Lássuk be, hogy a Klein kancsó az $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ összefüggő unióval homeomorf.
7. Bizonyítsuk be, hogy egy felülethez két szalag ragasztása nem más, mint összefüggő unió képzése a Klein kancsóval.
8. Bizonyítsuk be, hogy egy felülethez egy fogantyú ragasztása nem más, mint összefüggő unió képzése a tórusszal. Ezt úgy is elképzelhetjük, hogy a felületen két közeli lyukat vágunk (azaz két közeli körlapot elhagyunk) és egy meghajlított csövet e két lyuk pereméhez ragasztunk a cső két peremköre mentén (egyazon oldalról). Világos, hogy a körlapok arrébbcsúsztatása során a kapott felület topologikus típusa nem változik meg (azaz a felület homeomorf marad).
9. Egy felület pontosan akkor irányítható, ha nem tartalmaz Möbius szalagot. (*Útmutatás:* 2-dimenziós egyszerűsítésekkel fogjuk össze egyetlen sokszögbe az egész háromszögelést. Ekkor mindkét oldal a következővel ekvivalens: a peremen a ragasztást megadó szóban egyik betű sem szerepel kétszer ugyanazon kitevővel.)
10. Mi lesz $A'_q \# T^2$? Általánosabban, határozzuk meg $A'_q \# A_p$-t.

11. Legyenek $a_1, \dots, a_n$ különböző komplex számok, és vegyük az $M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^k = (w - a_1) \dots (w - a_n)\}$ felületet. Lássuk be, hogy M egy olyan felülettel homeomorf, melyet a g nemű felületből kapunk l körlap eltávolításával. Hogyan függ g és l a k, n számoktól?

12. Milyen felületet definiál a $z^n + w^n = 1$ egyenlet $\mathbb{C}^2$-ben?

13. Melyek azok a felületek, melyek két homeomorf részre bonthatók egy körvonallal? Két körvonallal?

14. Lássuk be, hogy ha az M^2 zárt felület fundamentális csoportja végtelen, akkor M^2 univerzális fedőtere pontrahúzható.

15. Minden $k > 2$ egész számra adjunk egy $\Sigma_k \to \Sigma_2$ reguláris fedést. (Σ_k itt a k nemű zárt irányított felületet jelöli.)

16. Legyenek $G = F_n$ és $H = F_m$ adott szabad csoportok, és tegyük fel, hogy $H < G$ valamint $|G : H| = k$. Lássuk be ekkor, hogy $m - 1 = (n - 1)k$.

14. fejezet

Differenciálható sokaságok

14.1 Differenciálható (vagy sima) sokaságok

14.1.1. definíció. • Az M^n topologikus sokaságon *térképnek* nevezünk egy olyan (U, φ) párt, amelyben U egy nyílt halmaz M^n-ben, φ pedig egy $U_i \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részére. Térképek egy $\{(U_i, \varphi_i)\}$ halmazát az M^n sokaság egy (differenciálható) *atlaszának* nevezzük, ha $M^n = \cup U_i$ és minden $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ differenciálható ott ahol értelmezve van. Két atlasz *ekvivalens*, ha uniójuk is atlasz. Egy *differenciálható struktúra* egy topologikus sokaságon az atlaszok egy ekvivalenciaosztálya. Egy differenciálható struktúrával ellátott topologikus sokaságot *differenciálható sokaságnak* nevezünk.

- Differenciálható sokaságok közötti leképezésekre definiálható a differenciálhatóság (vagy simaság). M és N differenciálható sokaságokra legyen $\{(U_i, \varphi_i)\}$ az M, $\{(V_j, \psi_j)\}$ pedig az N egy atlasza. Az $f: M \to N$ leképezést *differenciálhatónak* mondjuk, ha minden $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ leképezés differenciálható mindenütt, ahol értelmezett. Nyilvánvaló, hogy az f leképezés differenciálhatósága nem függ attól, hogy az M és N differenciáható sokaságokon mely atlaszokat tekintjük (a differenciálható struktúra által megadott ekvivalenciaosztályból).

- Egy $f: M \to N$ homeomorfizmust *diffeomorfizmusnak* nevezünk, ha az inverzével együtt differenciálható. (Ekkor minden $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ maximális rangú minden pontban.)

Sima sokaságokat szokás (megfelelő feltételeknek eleget tevő) $\{f_i\}_{i \in I}$ valamely rögzített $\mathbb{R}^n$-en értelmezett függvények közös nullhelyeinek halmazaként is definiálni. (A fent említett "megfelelő feltételek" valójában azt garantálják, hogy az implicit függvény tétel alkalmazható legyen, következésképp a közös nullhelyek halmaza teljesítse a 14.1.1 definíciót.) Egy Whitneytől szárazó tétel (melyet mi itt csak a kompakt esetben tárgyalunk) szerint a fordított irány is igaz, vagyis:

14.1.2. tétel. (Whitney) *Minden kompakt differenciálható sokaság beágyazható valamilyen euklideszi térbe.*

Bizonyítás. Legyenek $Z_i \subset W_i \subset V_i \subset U_i$ olyan nyílt halmazok, melyekre

$$Z_i \subset \bar{Z}_i \subset W_i \subset \bar{W}_i \subset V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$$

és még a Z_i-k is lefedik az M sokaságot, azaz $\cup_{i=1}^k Z_i = M^n$; rögzítsük továbbá a $\psi_i: U_i \to \mathbb{R}^n$ lokális koordinátákat. Legyen $\mu_i: M \to [0,1]$ olyan sima függvény, melyre $\mu_i|\bar{W}_i = 1$ és $\mu_i|(M \setminus V_i) = 0$. Ekkor a $\mu_i \cdot \psi_i: U_i \to \mathbb{R}^n$ leképezés V_i-n kívül már azonosan nulla, ezért kiterjeszthető az egész M-re úgy, hogy U_i-n kívül már 0 legyen. Jelöljük ezt a kiterjesztett függvényt φ_i-vel, vagyis

$$\varphi_i: M \to \mathbb{R}^n, \quad \text{melyre } \varphi_i|U_i = \mu_i \cdot \psi_i \text{ és } \varphi_i|M \setminus U_i = 0.$$

Legyen $\lambda_i: M \to [0,1]$ egy olyan sima függvény, melyre $\lambda_i|Z_i \equiv 1$ és $\lambda_i|(M \setminus W_i) \equiv 0$. (Itt nem a sima Uriszon lemmát használjuk, hiszen annak bizonyításában felhasználjuk ezt a beágyazhatósági tételt. Ám ha $\chi(D_r)$ az r

sugarú golyó karakterisztikus függvénye, akkor a $K_\delta * \chi(D_r)$ függvény azonosan 1 a $D_{r-\delta}$ golyón, és azonosan 0 a $D_{r+\delta}$-n kívül.) Legyen $\Phi = (\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2, \ldots, \varphi_k, \lambda_k)$. Az alábbi állítás szerint Φ egy beágyazása M-nek egy megfelelő dimenziós euklideszi térbe, amivel a 14.1.2 tétel bizonyítása kész. $\square$

14.1.3. állítás. *A fent definiált Φ leképezés egy beágyazás.*

Bizonyítás. Φ nyilván maximális rangú, hiszen ha $x \in W_i$, akkor már φ_i maximális rangú. Azt kell még belátnunk, hogy Φ injektív, azaz $\Phi(x) \neq \Phi(y)$, ha $x \neq y$. Legyen i olyan, hogy $x \in Z_i$. Ha most $y \in W_i$ akkor $\varphi_i(x) \neq \varphi_i(y)$, mert a W_i-n a φ_i injektív. Ha $y \notin W_i$ akkor $\lambda_i(y) = 0 \neq 1 = \lambda_i(x)$. Evvel Φ injektivitását be is láttuk. $\square$

A beágyazáselmélet alapkérdései:
(1) Adott M^n sokaságra mi az a legkisebb q, melyre létezik M^n-nek beágyazása az $\mathbb{R}^q$ euklidszi térbe?
(2) Hány nem izotóp beágyazása létezik M^n-nek egy adott euklideszi térbe?

Térjünk most vissza a sokaságok tárgyalására. Legyen $DIFF$ a differenciálható sokaságok és sima leképezéseik kategóriája, TOP pedig a topologikus sokaságok és folytonos leképezéseik kategóriája. Létezik egy természetes $DIFF \to TOP$ leképezés (a "felejtő funktor"). A Differenciál Topológia (egyik) alapkérdése a következő:
Kérdés: Mi mondható erről a felejtő funktorról ?
Válaszok: (1) $n \leq 3$ dimenzióban a $DIFF \to TOP$ leképezés kölcsönösen egyértelmű, azaz minden legfeljebb 3-dimenziós topologikus sokaságon létezik pontosan egy differenciálható struktúra.
(2) 1956-ban Milnor belátta, hogy S^7-en pontosan 28 darab különböző differenciálható struktúra létezik. 1963-ban Kervaire és Milnor minden $n \geq 5$-re meghatározták S^n-en a különböző differenciálható struktúrák számát; például S^{19}-en ez a szám 1 096 523.
(3) Kervaire 1960-ban belátta, hogy létezik olyan M^8 topologikus sokaság, melyen nem létezik differenciálható struktúra.
(4) Sullivan belátta, hogy minden $n \geq 5$ dimenziós sokaságon véges sok differenciálható struktúra létezik.
(5) $\mathbb{R}^n$-en $n \neq 4$ esetén egyetlen differenciálható struktúra létezik. $\mathbb{R}^4$-en pedig kontinuum sok differenciálható struktúra van.
(6) Létezik nagyon sok olyan zárt 4-sokaság, melyen nem létezik differenciálható struktúra (Freedmman és Donaldson 1985 körül), valamint végtelen sok olyan topologikus zárt 4-sokaság van, melyen végtelen sok (egymással nem diffeomorf) sima struktúra található.

14.2 Leképezések

Legyen M^n egy differenciálható sokaság, és $p \in M^n$ ennek egy pontja. Tekintsük az $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumnak M^n-be történő összes lehetséges sima leképezését melynél a $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ pont a p-be képződik, ε pedig tetszőleges (nem rögzített) pozitív szám. Két ilyen (akár különböző ε-hoz tartozó) leképezést ekvivalensnek tekintünk, ha deriváltjaik a 0 pontban megegyeznek. (Vegyük észre, hogy ennek megállapításához bármely p-t tartalmazó térképet használhatjuk.) Egy ilyen ekvivalenciaosztályt az M sokaság egy p-beli *érintővektorának* nevezünk. Minden érintővektorhoz egy *deriválást*, vagyis egy, a p valamely környezetén megadott függvényekből a valós számokba mutató olyan lineáris leképezést lehet hozzárendelni, mely teljesíti a Leibnitz szabályt. (Nevezetesen, egy γ görbe osztálya rendelje az f függvényhez a $\frac{d(f(\gamma(t)))}{dt}$ derivált $t = 0$-ban felvett értékét.) Könnyű belátni, hogy minden ilyen deriválás megkapható valamely érintővektorból. Tehát az érintővektorokat definiálhattuk volna deriválásokként is. Innen világos, hogy az érintővektorok egy n-dimenziós lineáris teret alkotnak. Ezt az M^n sokaság p-beli érintőterének nevezzük és T_pM^n-nel jelöljük. Ha M^n egy euklideszi térbe van beágyazva — ez a beágyazás $i \colon M^n \subset \mathbb{R}^q$ — akkor a T_pM^n a következő, $i(p)$-n átmenő L_p affin altérrel azonosítható: Legyen (U, φ) az M^n sokaság egy p körüli térképe; ekkor T_pM^n az $i \circ \varphi^{-1}$ leképezésnek a $\varphi(p)$-beli *differenciáljának* képével azonosítható.

Az összes T_pM^n terek egyesítésén (ahol tehát p végigfut az M^n pontjain) egy természetes topológia (sőt differenciálható sokaság struktúra) adható meg. Mi most csak egy euklideszi térbe beágyazott M^n sokaságra fogjuk $\cup_p T_pM^n$-en a topológiát definiálni. Az így nyert teret TM^n-nel jelöljük majd és M^n *érintőnyalábjának* nevezzük. TM-et $M^n \times \mathbb{R}^q$ alterének tekinthetjük tehát, mivel $(p, v) \in M^n \times \mathbb{R}^q$ pontosan akkor eleme TM-nek ha $v \in L_p$. A TM^n térnek létezik egy $\pi: TM^n \to M^n$ természetes projekciója M^n-re, mely a (p,v) ponthoz a $p \in M^n$ pontot rendeli.

M^n-en értelmezett *vektormezőnek* nevezünk egy folytonos $s: M^n \to TM^n$ leképezést, melyre $\pi \circ s$ az identitást adja M^n-en. Ha $f: M^n \to N^k$ egy differenciálható leképezés, akkor f egy folytonos (valójában differenciálható) leképezést definiál TM^n-ből TN^k-ba, mely a T_pM^n érintőteret az N^k sokaság $f(p)$-beli $T_{f(p)}N^k$ érintőterébe képezi lineáris módon. E leképezés definíciója a következő: Képezzük a γ görbe által reprezentált T_pM^n-beli érintővektort az $f \circ \gamma$, $T_{f(p)}N^k$-beli érintővektorba. Az így kapott $TM^n \to TN^k$ leképezést az f differenciáljának nevezik és df-fel (vagy helyenként Tf-fel) jelölik.

14.2.1. definíció. • Egy olyan differenciálható leképezést, melynek differenciálja minden pontban epimorfizmus (azaz szürjektív), *szubmerziónak* nevezünk.

- Ha egy differenciálható leképezés differenciálja mindenütt monomorf (azaz injektív), akkor azt *immerziónak* hívjuk.
- Egy olyan immerziót, mely egyben topologikus beágyazás is, *beágyazásnak* hívunk.
- Egy olyan homotópiát, mely minden pillanatban immerzió, diffeomorfizmus, illetve beágyazás, *reguláris homotópiának, diffeotópiának* illetve *izotópiának* nevezünk.
- Az $f: M \to N$ leképezésnek az $x \in M$ pont *kritikus pontja*, ha $\operatorname{rk} df(x) < \dim N$, vagyis x-ben df szürjektív. Az $y \in N$ pont *kritikus érték*, ha egy kritikus pont képe. Egy nem kritikus értéket *reguláris értéknek* hívunk. (Egy reguláris értéknek speciálisan lehet üres az őse.) Például ha dim $M <$ dim N, akkor $f(M)$ minden pontja kritikus érték, $N \setminus f(M)$ pedig a reguláris értékek halmaza.

A differenciáltopológia alkalmazása az algebrai topológiában a következő három technikai állításon alapul:
(1) Ha M és N sima (azaz differenciálható) sokaságok, akkor tetszőleges folytonos leképezés tetszőlegesen approximálható sima leképezéssel. Sőt, ha az approximálandó (folytonos) leképezés egy kompakt halmaz egy környezetén már sima, akkor az approximáló leképezés választható úgy, hogy a kompakt halmaz egy (esetleg az előbbinél kisebb) környezetében vele megegyezzen.
(2) Reguláris érték őse részsokaság.
(3) Majdnem minden érték reguláris.

Az (1) állítás bizonyítását (M kompaktságát feltételezve) a 14.3 részben fogjuk részletezni (ld. 14.3.1 tételt). A (2) állítás valójában egy, az analízisből jól ismert tétel egyszerű következénye, hiszen az implicit függvénytétel éppen azt mondja ki, hogy ha egy p pontban az f leképezés differenciálja szürjektív, akkor a p pont és annak q képe körül választhatók úgy lokális koordináták, hogy ezen koordinátákban felírva a leképezést egy $(x,y) \to x$ alakú projekciót kapunk. Ekkor persze a p pontnak létezik euklideszi környezete $f^{-1}(p)$-ben. Mivel p tetszőleges pont volt, így $f^{-1}(q)$ valóban sokaság.

14.2.2. megjegyzés. Igaz továbbá a tétel egy peremes sokaságokra kimondott változata is: Ha f egy peremes sokaság sima leképezése egy (nem peremes) sokaságba, és a q pont f-nek is és a peremre vett megszorításának is reguláris értéke, akkor az $f^{-1}(q)$ őshalmaz egy peremes sokaság, melynek pereme része a leképezett sokaság peremének.

Végül a (3) állítást a következő tétel teszi pontossá (a bizonyítás ismét a következő részben, a 14.3.2 tételben kerül tárgyalásra). (Emlékeztető: $A \subset X$ sehol sem sűrű részhalmaza X-nek, ha $\overline{X \setminus \bar{A}} = X$.)

14.2.3. tétel. (Sard lemma) *Legyenek M^m és N^n zárt sima sokaságok, $f: M^m \to N^n$ sima leképezés. Ekkor a kritikus értékek halmaza sehol sem sűrű, zárt részhalmaza N-nek.*

A 14.3.1 és 14.3.2 tételek bizonyítása előtt ezek néhány fontos következményét látjuk be.

14.2.4. következmény. *Ha $f: S^m \to S^n$ folytonos leképezés és $m < n$, akkor f null-homotóp (vagyis homotóp a konstans leképezéssel.)*

Bizonyítás. Ha f sima, akkor (a Sard lemma miatt) $f(S^m)$ nem fedi le az egész S^n-t. Legyen $f(S^m) \subset S^n \setminus * = \mathbb{R}^n$. Ám $\mathbb{R}^n$-ben már minden leképezés null-homotóp. Másrészt tetszőleges folytonos leképezés tetszőleges pontossággal approximálható simával, és ha az approximáció elég finom, akkor az approximáló leképezés homotóp az approximálttal. Valóban, ehhez elég azt belátni, hogy a g approximáló és az f approximált leképezésre tejesüljön, hogy $f(x)$ és $g(x)$ távolsága minden $x \in S^m$-re kisebb legyen, mint 2 (ha az S^n sugara 1). Ekkor ugyanis $f(x)$ és $g(x)$ között egyértelműen meghúzható az S^n-en haladó legrövidebb út (a rajtuk átmenő főkör rövidebbik íve); ezen íven egy állandó sebességű homotópiával $f(x)$-et $g(x)$-be áthúzva (és ezt minden x-re egyszerre tekintve) egy homotópiát kapunk f és g között. □

14.2.5. következmény. *Ha $m < n$ akkor $\pi_m(S^n) = 0$.* □

Alább majd belátjuk, hogy az $S^n \to S^n$ identikus leképezés nem homtóp a konstans leképezéssel (ld. a 14.2.8 tétel bizonyítása után). Ebből következik, hogy

14.2.6. következmény. *$m \neq n$ esetén S^m nem homeomorf, sőt nem is homotopikusan ekvivalens S^n-nel.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $m < n$ és léteznek $f\colon S^m \to S^n$ és $g\colon S^n \to S^m$ leképezések, melyek egymás homotopikus inverzei, azaz például $g \circ f\colon S^m \to S^m$ homotóp az identitással. Ám f homotóp a konstans leképezéssel, ezért a kompozíció is az. □

14.2.7. következmény. *$m \neq n$ esetén $\mathbb{R}^m$ nem homeomorf $\mathbb{R}^n$-nel.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik egy $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus. Legyen p az $\mathbb{R}^m$-nek egy pontja és $q = f(p)$ ennek képe. Ekkor f homeomorfizmus $\mathbb{R}^m \setminus \{p\}$ és $\mathbb{R}^n \setminus \{q\}$ között. Ám e két tér homeomorf $S^{m-1} \times \mathbb{R}^1_+$-szal illetve $S^{n-1} \times \mathbb{R}^1_+$-szal, s így homotopikusan ekvivalens S^{m-1}-gyel illetve S^{n-1}-gyel. E két gömb azonban egymással nem homotopikusan ekvivalens, amiből következik, hogy $\mathbb{R}^m$ nem homeomorf $\mathbb{R}^n$-nel
□

14.2.8. tétel. (Általánosított Borsuk tétel) *Egy M kompakt, peremes sokaság ∂M pereme nem retraktuma M-nek.*

Bizonyítás. A tételt csak differenciálható sokaságra fogjuk bebizonyítani. Legyen tehát M^n kompakt, peremes sima sokaság ∂M peremmel, és $r\colon M \to \partial M$ egy retrakció. Feltehetjük, hogy r sima. (Egy $\partial M \times [0,1]$ hengert M pereméhez e henger lapjánál odaragasztva bővítsük ki M-et és kiterjesszük ki r-t e hengerre úgy, hogy az alkotók mentén konstans legyen. Ezt a kiterjesztett r leképezést már sima leképezéssel approximálhatjuk úgy, hogy a perem egy környezetén nem változtatjuk.) Tekintsük egy reguláris érték ősét. Ez egy kompakt peremes 1-dimenziós sokaság egyetlen peremponttal. Ám ilyen a 12.2.1 tétel értelmében nem létezik. (Informálisan, az Algebrai Topológia alaptétele: A madzagnak két vége van.) □

Speciálisan tehát nem létezik $D^{n+1} \to S^n$ retrakció. Ez nyilvánvalóan implikálja azt, hogy az $S^n \to S^n$ identikus leképezés nem homotóp a konstans leképezéssel. Másrészt (úgyanúgy mint a 2-dimenziós változatból), a 14.2.8 tételből is megkapható a Brouwer fixponttétel:

14.2.9. tétel. (Brouwer) *Minden folytonos $f\colon D^n \to D^n$ leképezésnek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Ha minden $x \in D^n$-re $x \neq f(x)$, akkor az $f(x)$-ből x-en át félegyenest indíthatunk, és ahol ez a gömbfelületet metszi, az legyen az $r(x)$ pont. Így egy $r\colon D^n \to S^{n-1}$ retrakciót kapunk. Az ellentmondás egy olyan $x \in D^n$ létezését bizonyítja, melyre $f(x) = x$. □

14.3 Folytonos függvény approximálása simával

14.3.1. tétel. (A) *Legyenek M és N sima sokaságok, M kompakt, $f\colon M \to N$ pedig tetszőleges folytonos leképezés. Ekkor f-hez tetszőlegesen közel létezik egy g sima leképezés.*
(B) *Ha az f már maga is sima az M egy K kompakt részhalmazának valamely U környezetén, akkor g megválasztható úgy, hogy K-n megegyezzen f-fel.*

(A fenti tételben szereplő "közel" következőképpen értendő: Rögzítsünk N-en egy ρ metrikát. Ekkor tetszőleges $\epsilon > 0$-ra létezik olyan $g\colon M \to N$ sima leképezés, melyre $\rho(f(x), g(x)) < \epsilon$ minden $x \in M$ esetén.)

Bizonyítás. Az (A) rész bizonyítása három lépésben történik.
(1) Legyen először N az $\mathbb{R}$ számegyenes. Ágyazzuk be M-et egy euklideszi térbe és terjesszük ki az f függvényt az M-ről az egész euklideszi térre úgy, hogy az M egy kis környezetén kívül nulla legyen. A kiterjesztéssel kapott folytonos függvényt szintén f-fel jelöljük. Legyen δ az adott ϵ-hoz és az f-hez (annak egyenletes folytonossága alapján) tartozó δ. Legyen $K(x)$ egy olyan sima függvény az $\mathbb{R}^q$ euklideszi téren, melyre $K(x) = 0$ ha $\| x \| > \frac{\delta}{2}$ és $\int_{\mathbb{R}^q} K(x) = 1$. Legyen továbbá $g(y) = \int f(x) \cdot K(x-y)dx$. Ekkor g sima és $|g(x) - f(x)| < \epsilon$. Valóban,

$$|g(x) - f(x)| = |\int f(y) \cdot K(y-x)dy - \int f(x) \cdot K(y-x)dy| =$$

$$= \int |f(y) - f(x)| K(y-x)dy < \epsilon \int K(y-x)dy = \epsilon.$$

(2) A bizonyítás nyilván ugyanígy megy, ha N akármilyen euklideszi tér.
(3) Legyen végül N tetszőleges sokaság. Ágyazzuk be N-t egy $\mathbb{R}^p$ euklideszi térbe és tekintsük f-et mint egy $\mathbb{R}^p$-be menő leképezést, majd approximáljuk egy simával. Az N-nek létezik $\mathbb{R}^p$-ben olyan (csőszerű) környezete, mely simán vetíthető N-re. Az approximáló leképezést e sima vetítéssel komponálva kapjuk a keresett $M \to N$ approximációt.

Rátérünk végül a (B) rész bizonyítására. Legyen V egy olyan környezet, melyre $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Legyen δ a K-nak és V komplementerének távolsága. Alkalmazzuk a fenti átlagoló eljárást egy ezen δ feléhez tartozó $K(x)$ átlagoló függvénnyel $\bar{V}$ karakterisztikus függvényére. Eredményül egy ψ sima függvényt kapunk, mely a K egy környezetén azonosan 1. Legyen f ismét az M sokaságnak egy tetszőleges euklideszi térbe menő leképezése; ekkor tehát $f = \psi \cdot f + (f - \psi \cdot f)$.

A második összeadandó nulla a K egy környezetén. Ilymódon ha ezt átlagoljuk elég kis sugarú átlagoló függvénnyel, akkor az továbbra is nulla marad K-n. Az így kapott sima függvényt a második összeadandó helyére írva a kapott összegfüggvény sima lesz és K-n megegyezik f-fel. $\square$

14.3.2. tétel. (Sard lemma) *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz és $f\colon U \to \mathbb{R}^p$ sima leképezés, valamint legyen $C = \{x \in U \mid \text{rk } df_x < p\}$. Ekkor $f(C) \subset \mathbb{R}^p$ nullmértékű.*

Bizonyítás. A bizonyítás n szerinti teljes indukcióval történik. $n = 0$-ra az állítás triviálisan igaz. Legyen $C_1 = \{x \in U \mid df_x = 0\}$ és $C_i = \{x \in U \mid \partial^r f_x = 0 \; \forall r \leq i\}$; ekkor tehát $C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$. A következő három állítást fogjuk bizonyítani, melyek együtt nyilvánvalóan implikálják a tételt.
(1) $\mu(f(C \setminus C_1)) = 0$ (vagyis $f(C \setminus C_1)$ nullmértékű);
(2) $\mu(f(C_i \setminus C_{i+1})) = 0$;
(3) végül $\mu(f(C_k)) = 0$ ha k elég nagy.

Az (1) állítás bizonyítása: Ha $p = 1$, akkor $C = C_1$ így az állítás ez esetben nyilvánvaló. Legyen tehát $p \geq 2$. Ha $x \notin C_1$, akkor van olyan parciális derivált mely nem nulla, például $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$. Tekintsük a $h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_n)$ formulával megadott $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ leképezést. Mivel $\det dh_{\bar{x}}$ nem nulla, így x-nek van olyan V_x környezete, melyen a h diffeomorfizmus. Vegyük most a $g = f \circ h^{-1}\colon h(V_{\bar{x}}) \to \mathbb{R}^p$ leképezést. g kritikus értékei a $h(V)$-ben ugyanazok, mint az f kritikus értékei a V-ben, és g hipersíkot hipersíkba visz. Egy ilyen $\mathbb{R}^{n-1}_t$ hipersíkon a $g^t\colon \mathbb{R}^{n-1}_t \to \mathbb{R}^{p-1}_t$ leképezésnek egy pont pontosan akkor kritikus pontja, ha a g-nek is az. Ilymódon az indukciós feltevés és a Fubini tétel implikálják az (1) állítást.

A (2) állítás bizonyítása: Feltétel szerint minden $x \in C_k \setminus C_{k+1}$-re van egy olyan k-adik parciális derivált, mely e pontban eltűnik, de amelynek létezik egy olyan parciális deriváltja, mely nem nulla e pontban. Legyen ez a k-adik derivált $w(x)$ és legyen $\frac{\partial w(x)}{\partial x_1} \neq 0$. Legyen továbbá $h\colon U \to \mathbb{R}^p$ a $h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_n)$ leképezés. Ez a h ismét diffeomorfizmus V_x egy környezetén; másrészt $h(C_k \cap V) \subset 0 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Legyen $g = f \circ h^{-1}\colon h(V) \to \mathbb{R}^p$, $\bar{g}$ pedig g megszorítása a $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$ altérre. Vegyük észre, hogy $(\bar{g} \circ h)(C_k \cap V) = f(C_k \cap V)$. Az indukciós feltevés miatt ez a halmaz nullmértékű; mivel a $C_k \setminus C_{k+1}$ halmaz lefedhető megszámlálhatóan sok ilyen V-vel ezért $f(C_k \setminus C_{k+1})$ nullmértékű.

A (3) állítás bizonyítása: Legyen $I^n \subset U$ egy δ élű kocka. Belátjuk, hogy ha k elég nagy (pontosabban, ha $k > \frac{n}{p} - 1$), akkor $\mu(f(C_k \cap I^n)) = 0$. (Mivel C_k lefedhető megszámlálhatóan sok ilyen kockával, így ez már $\mu(f(C_k)) = 0$-t adja.) Taylor tétel szerint $f(x+h) = f(x) + R(x,h)$ ahol $|R(x,h)| \leq c|h|^{k+1}$. Bontsuk I^n-t r^n darab $\frac{\delta}{r}$ élű kiskockákra, és legyen I_1 egy ilyen kiskocka. Mivel $f(I_1)$ benne van egy $\frac{a}{r^{k+1}}$ élű kockában, és r^n darab ilyen kocka mértéke $\leq r^n \cdot (\frac{a}{r^{k+1}})^p$ nullához tart ha $r \to \infty$, az állítás bizonyítása kész. □

14.4 Feladatok

1. Lie csoportnak nevezünk egy olyan sima sokaságot, melyen egy (differenciálható leképezésekkel adott) csoportművelet adott. Lássuk be, hogy egy Lie csoport érintőnyalábja direkt szorzat.

2. Melyek a 2-dimenziós Lie csoportok?

3. Lássuk be, hogy sima sokaságok szorzata is sima.

4. Lássuk be a 14.3.1 tételt minden (tehát nem csak kompakt) M esetére.

5. Legyen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ az $9x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$ formulával megadva. Bizonyítsuk be, hogy $0 \in \mathbb{R}$ reguláris értéke f-nek. Mi lesz $f^{-1}(0)$?

6. Legyen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ az $9x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 - 4)^2 + z^2 - 1$ formulával megadva. Bizonyítsuk be, hogy $0 \in \mathbb{R}$ reguláris értéke f-nek. Mi lesz $f^{-1}(0)$?

7. Lássuk be, hogy minden p-re létezik egy $f\colon_p \to \mathbb{R}$ függvény, melynek pontosan 3 kritikus értéke van. (Valójában $p \neq 0$ esetén 3 nem javítható.)

8. Legyen $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ differenciálható, és legyen $y \in \mathbb{R}$ egy reguláris értéke. Lássuk be, hogy $f^{-1}(y)$ páros sok pontból áll. Ha ez az érték $2k$-val egyenlő, akkor mutassuk meg, hogy f-nek legalább $2k$ kritikus pontja van.

9. Legyen most $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható, és legyen $y \in \mathbb{R}$ ennek egy reguláris értéke. Tegyük fel, $f^{-1}(y)$-nek k komponense van. Mutassuk meg, hogy f-nek legalább $k+1$ kritikus pontja van.

10. Egy $f\colon M \to N$ sima leképezés Γ *gráfjának* nevezzük azon $(x,y) \in M \times N$ pontok halmazát, melyre $f(x) = y$. Lássuk be, hogy Γ egy sima sokaság.

11. Tegyük fel, hogy $m < n$. Lássuk be, hogy ekkor minden $M^m \to S^n$ leképezés a konstanssal homotóp.

12. Legyen $N_1, N_2 \subset M$ két adott részsokaság. Azt mondjuk, hogy N_1 *transzverzálisan metszi* N_2-t, ha minden $x \in N_1 \cap N_2$ pontra a T_xN_1 és T_xN_2 alterek generálják T_xM-et. Igazoljuk, hogy két részsokaság transzverzális metszete is részsokaság. Mutassunk példát arra, hogy két (nem feltétlenül transzverzálisan) metsző sokaság metszete nem sokaság.

15. fejezet

Leképezések foka

15.1 Leképezések foka

Motiváló feladat: A szegény lokális bakter és az őrült mozdonyvezető esete.
Egy óriási köralakú pályán az őrült mozdonyvezető előre-hátra rohangászik szédült sebességgel egy ideig, végül ugyanott áll meg, ahonnan elindult. Így a mozdony mozgása a körvonal fundamentális csoportjának egy elemét reprezentálta. Legyen ez az elem $m \in \mathbb{Z} \approx \pi_1(S^1)$. A bakter a házából a pályának csupán egy kicsiny szakaszát látja. Meg kell állapítania a mozdonyvezető által realizált fundamentális csoportbeli elemet, azaz m értékét.
Megoldás: Valahányszor a mozdony elrobog előtte balról jobbra feljegyez egy $+1$-et, ha pedig jobbról balra, akkor -1-et. A kapott számok összege adja m-et (ha a pálya balról jobbra van irányítva). A bakter ugyanis nem tesz mást, mint megszámolja a pálya egy pontjának hány őse van és minden őspontot aszerint előjelez, hogy ott lokálisan a leképezés megőrzi, vagy megváltoztatja a körvonal irányítását.

15.1.1. definíció. Legyen $f\colon M^n \to N^n$ egy sima leképezés, ahol M^n és N^n zárt, n-dimenziós, differencálható sokaságok. Legyen $y \in N^n$ egy reguláris érték. Ekkor $\deg_2 f_y$-nal jelöljük és az f leképezés y-beli *mod* 2 fokának nevezzük az $f^{-1}(y)$ halmaz elemszámának párosságát. (Vegyük észre, hogy az $f^{-1}(y)$ halmaz véges, mivel egy kompakt 0-dimenziós sokaság.)

Amennyiben M^n és N^n irányított sokaságok, úgy a fokszám nem csak modulo 2 definiálható. Ehhez azonban először definiálnunk kell az irányított sokaság fogalmát.

15.1.2. definíció.
- Az M^n differenciálható sokaság *irányítható*, ha létezik olyan atlasza, melyben az átmenő függvények (azaz a $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ leképzések) mind irányítástartók, vagyis minden pontban a Jacobi mátrix determinánsa pozitív. Az ilyen atlaszt irányított atlasznak nevezzük. Két atlaszt ekvivalensnek nevezünk, ha egyesítésük is irányított atlasz. Az irányított atlaszok egy ekvivalencia osztályát a sokaság egy irányításának nevezzük. A sokaság *irányított*, ha adott egy irányítása.
- Legyen $f\colon M^n \to N^n$ két egyenlő dimenziós, zárt, irányított, sima sokaság között egy sima leképezés, és tegyük fel, hogy N^n összefüggő. Legyen y az f leképezés egy reguláris értéke. Ennek minden őspontjában definiálunk egy ± 1-et aszerint, hogy f az adott pont körül irányítástartó vagy váltó. Ezek összege a leképezés $\deg f_y$ foka az adott y pontban.

Célunk, hogy belássuk a következő tételt:

15.1.3. tétel. *A $\deg_2 f_y$ illetve $\deg f_y$ fokok csak az f leképezéstől (sőt ennek is csak a homotópiaosztályától), nem pedig a választott y ponttól függnek.*

15.1.4. definíció. Az így kapott $\deg f = \deg f_y$ illetve $\deg_2 f = \deg_2 f_y$ számot az f leképzés fokának (illetve mod 2 fokának) nevezzük.

15.1.5. megjegyzés. A tétel lehetővé teszi a fokszám definiálását *tetszőleges folytonos* leképezésre. Approximáljunk ugyanis egy folytonos leképezést simával és nevezzük e sima approximáció fokát az eredeti folytonos leképezés fokának. Ez a definició korrekt mivel egy (kellően közeli) approximáció homotóp az eredeti leképezéssel, így a közeli approximációk egymással is homotópok, s homotóp leképezések foka megegyezik.

A tétel bizonyításához egy sor lemmát kell előbb belátnunk.

15.1.6. lemma. *Legyen* $H: M^n \times [0,1] \to N^n$ *egy sima homotópia, melyre*

$$H(x,t) = f(x) \quad 0 \le t \le \tfrac{1}{3}$$

$$H(x,t) = g(x) \quad \tfrac{2}{3} \le t \le 1$$

Legyen továbbá y a H-nak reguláris értéke. Ekkor $\deg_2 f_y = \deg_2 g_y$.

Bizonyítás. $H^{-1}(y)$ peremes 1-dimenziós kompakt sokaság, tehát páros sok perempontja van. Ám a perem éppen az $(f^{-1}(y), 0)$ és a $(g^{-1}(y), 1)$ halmazok egyesítése. Tehát $\deg_2 f_y + \deg_2 g_y = 0 \bmod 2$. □

15.1.7. lemma. *Ha az M^n és N^n előző lemmabeli sokaságok irányítottak, akkor* $\deg f_y = \deg g_y$.

Bizonyítás. Ehhez csak azt kell belátni, hogy ha L a $H^{-1}(y)$ egy ívkomponense, akkor
(1) ha ∂L mindkét pontja az $M^n \times [0,1]$ henger ugyanazon peremén van (azaz vagy mindkettő az $M^n \times \{0\}$-n, vagy mindkettő az $M^n \times \{1\}$-en), akkor ezek ellentétes előjelű pontok, illetve
(2) ha viszont különböző peremeken vannak (azaz az egyik $M^n \times \{0\}$-n, a másik pedig $M^n \times \{1\}$-en), akkor ezek megegyező előjelű pontok.

Válasszuk ki az L egy irányítását. Minden $q \in L$ pontra egyértelműen kiválasztható a T_qM érintőtérben a T_qL-re merőleges K_q altérnek egy olyan irányítása, mely az L irányításával együtt az $M^n \times [0,1]$ henger irányítását adja. Világos, hogy K_q leképezése a T_yN-be ugyanolyan előjelű minden $q \in L$-re. Innen az állítás nyilvánvaló. □

A következő lemmák könnyen beláthatóak. (A továbbiakban $\deg_{(2)} f$ a mod 2 definiált $\deg_2 f$ fokot jelenti a nem-irányított, és $\deg f \in \mathbb{Z}$-t az irányított esetben.)

15.1.8. lemma. *A $\deg_{(2)} f_y$ fok lokálisan konstans. Azaz létezik az y reguláris értéknek egy olyan U_y környezete, hogy minden $z \in U_y$-ra* $\deg_{(2)} f_z = \deg_{(2)} f_z$. □

15.1.9. lemma. *Legyenek f és g homotóp leképezések M^n-ből N^n-be, és legyen y egy közös reguláris érték. Ekkor* $\deg_{(2)} f_y = \deg_{(2)} g_y$. □

A foknak a választott ponttól való függetlenségét bizonyító 15.1.10 lemma bizonyítása az egyszerűen belátható 15.1.11 lemmán múlik.

15.1.10. lemma. *Legyen y és z az f leképezés két tetszőleges reguláris értéke. Ekkor* $\deg_{(2)} f_y = \deg_{(2)} f_z$. □

15.1.11. lemma. (Homogenitási lemma) *Legyen y és z két tetszőleges pontja az összefüggő N^n sokaságnak. Ekkor létezik olyan H_t diffeotópia (azaz olyan homotópia, mely minden pillanatban diffeoemorfizmus), melyre H_0 = identitás, és $H_1(y) = z$.* □

15.2 Alkalmazások

Most pedig rátérünk a fent definiált fok fogalmának alkalmazására.

15.2.1. tétel. *Páros dimenziós gömbfelületen nem létezik sehol el nem tűnő érintő vektormező.*

Bizonyítás. Az $x \mapsto -x$ leképezés az S^{2k} gömbfelületen egy -1 fokú leképezés. (Valóban, ez $2k+1$ darab hipersíkra való tükrözés kompozíciója, és mivel minden tükrözés foka -1, így a kompozíció foka $(-1)^{2k+1} = -1$.) Másrészt, ha egy gömbön létezik nem nulla érintő vektormező, akkor az identitás homotóp az $x \mapsto -x$ leképezéssel, ugyanis minden x pontot folytonosan át tudunk deformálni a $-x$ pontba az x-ben adott érintővektor irányába kiinduló félfőkörív mentén. Ám az identitás foka nyilván 1. Tehát páros dimenziós gömbfelületen $x \mapsto -x$ nem lehet az identitással homotóp, következésképp egy ilyen gömbön nincs sehol el nem tűnő vektormező sem. $\square$

Emlékeztető: Páratlan dimenziós gömbön mindig létezik nem nulla érintő vektormező. (Vegyük például az $x \in S^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k} \approx \mathbb{C}^k$ pontban az ix vektor.) Természetesen vetődik fel az a kérdés, hogy hány, minden pontban független érintővektormező adható meg az S^{n-1} gömbön? A választ 1961-ben Adams adta meg: S^{n-1}-en pontosan $\rho(n)-1$ (független) érintőmező adható meg, ahol $\rho(n)$ definiciója a következő: Ha $n = (2a+1)2^{c+4d}$ (ahol $0 \leq c \leq 3$), akkor $\rho(n) = 2^c + 8d$.

15.2.2. lemma. *Legyen $f, g\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ két irányítható, diffeomorfizmus. Ekkor létezik olyan $h\colon [0,1] \times (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ homotópia, melyben rögzített $t \in [0,1]$-re minden $h_t(x) = h(t,x)$ diffeomorfizmus (az ilyen homotópiát diffeotópiának neveztük) és $h_0 = g$, $h_1 = f$.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy f egy diffeotópiával összeköthető a saját 0-ban vett differenciáljával. Legyen ehhez $h_t = \frac{1}{t} f(tx)$ ha $0 < t \leq 1$ és $h_0 = df_0$. Ez egy folytonos leképezés-család (tehát homotópia), mert $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} f(tx) = df_0(x)$ minden x-re. Ismert, hogy $GL^+(n, \mathbb{R})$-nek deformációs retraktuma az $SO(n)$, továbbá hogy $SO(n)$ útösszefüggő. (Ez utóbbi állítást indukcióval láthatjuk be a következő leképezés segítségével: legyen $SO(n) \to S^{n-1}$ az a leképezés, mely minden mátrixhoz annak első oszlopvektorát rendeli. Ekkor minden pont őse egy $SO(n-1)$; sőt az S^{n-1} minen pontjának van olyan környezete melynek őse e környezetnek és $SO(n-1)$-nek direkt szorzata. Most már S^{n-1} és $SO(n-1)$ útösszefüggő voltából könnyen következik $SO(n)$ útösszefüggősége. E három lépés nyilvánvalóan implikálja a Lemma állítását. $\square$

15.2.3. tétel. (Hopf) *Legyen M^n zárt, összefüggő, irányítható differenciálható sokaság. Jelölje $[M^n, S^n]$ az $M^n \to S^n$ folytonos leképezések homotópiaosztályainak halmazát. Ekkor a* $\deg\colon [M^n, S^n] \to \mathbb{Z}$ *fokszám-leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít az egész számok halmazával.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a deg leképezés szürjektív, azaz tetszőleges k egész számra létezik k fokú $M^n \to S^n$ leképezés. Vegyünk fel $|k|$ darab diszjunkt, D^n-nel diffeomorf halmazt M^n-ben, majd ezek mindegyikét képezzük le S^n-re úgy, hogy a peremük mind az S^n déli pólusába képződjön, a belső részeik pedig diffeomorfan a déli pólus komplementumára képződjenek. Képezzük M^n összes többi pontját a déli pólusba. Így nyilván egy $|k|$ fokú leképezést nyertünk. Ha k negatív, akkor komponáljuk a kapott leképezést az S^n egy -1 fokú önmagára való leképezésével (pl. egy hipersíkra való tükrözéssel). Evvel beláttuk, hogy a deg függvény szürjektív. deg injektivitása a következő állítás következménye lesz.

15.2.4. állítás. *Legyen $f\colon M^n \to S^n$ nulla fokú leképezés. Ekkor f null-homotóp.*

Bizonyítás. Legyen q egy reguláris érték, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ennek ősei, V a q-nak, U_i pedig a p_i pontoknak olyan diszjunkt, int D^n-nel diffeomorf környezetei, hogy $f^{-1}(V) = \cup U_i$, és az U_i környezetek diszjunktak. Fújjuk fel a V környeztet úgy, hogy egy pont híján beborítsa az S^n gömböt. Ez megvalósítható az S^n gömb egy homotópiájával. Ezt f-fel komponálva egy homotópiát kapunk, mely f-et egy olyan leképezéssel köti össze, mely ezen U_i környezeteket (egy pont híján) S^n-re képezei, az U_i-ken kívüli pontokat pedig ezen egyetlen pontba. Egyes U_i-ken a leképezés irányítástartó, más környezeteken pedig irányításváltó. Most már csak azt kell belátni, hogy egy homotópiával egy ellentétes előjelű környezetpár eltüntethető a V őshalmazából. (Így végül a q pontnak nem lesz őspépe, vagyis a leképezés képe része lesz az $S^n \setminus \{q\} = \mathbb{R}^n$ halmaznak, de akkor már a leképezés null-homotóp — mint minden $\mathbb{R}^n$-be menő leképezés.)' Legyen mondjuk U_1 és U_2 egy pozitív és egy negatív környezet (azaz a leképezés U_1-en irányítástartó, U_2-n pedig irányításváltó). A 15.2.2 lemma szerint az $U_1 = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n = S^n \setminus *$ leképezés az identitással, az $U_2 \to S^n \setminus *$ leképezés pedig egy koordinátasíkra vett tükrözéssel izotóp. Ekkor e két környezet eltüntethető: Hozzuk e két környezetet egy kockába, és legyenek ott egymás valamely síkra vonatkozó tükörképei, sőt legyen a leképezés is tükörszimmetrikus e két golyón; ezek komplementuma pedig képződjön egy pontba. Akkor ezen a kockán egy homotópiát definiálhatunk, mely a peremén továbbra is konstans, belül pedig a kocka feletti hengerben forgassuk át az egyik golyót a másikba. A henger e forgatás által súrolt részén definiálja a homotópiát az, ahogy a golyó minden pontja a forgatása során állandóan ugyanoda képződik. A henger fennmaradó pontjai ugyanoda mennek, mint a kocka pereme. Ha tehát f foka nulla, úgy azt kaptuk, hogy null-homotóp. □

A 15.2.4 állítás bizonyításával immár a 15.2.3 tétel bizonyítása is teljes. □

15.2.5. kiegészítés. *Ha M^n zárt, összefüggő, de nem irányítható, akkor a mod 2 fok egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít az $[M^n, S^n]$ homotópiaosztályok és $\mathbb{Z}_2$ között.*

Bizonyítás. A bizonyítás hasonlóan megy, mint a fenti esetben. Ha van két őskörnyezet, melyek egy adott környezetben egyforma előjelűek, akkor az egyiket egy irányításfordító úton körbevive már egyazon koordinátarendszerben ellentétesek lesznek e környezetek előjelei, és most már eltüntethetők a fenti eljárással. A bizonyítás többi része szó szerint elismételhető. □

15.2.6. következmény. $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$. □

15.2.7. következmény. *Ha $f\colon S^n \to S^n$ olyan függvény, melyre* $\deg f \neq (-1)^{n+1}$, *akkor f-nek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f-nek nem létezik fixpontja. Ekkor $f(x)$-et az x-ből a $-x$ pontba fújhatjuk (pontosabban: tekintsük a

$$h_t(x) = \frac{tf(x)-(1-t)x}{|tf(x)-(1-t)x|}$$

homotópiát), s így f homotóp lesz az $x \mapsto -x$ leképezéssel, melynek foka $(-1)^{n+1}$. De ekkor f foka is ennyi kell legyen. □

15.3 A Poincaré-Hopf tétel

Legyen Ω egy $\mathbb{R}^n$-beli korlátos tartomány, melynek pereme egy sima hiperfelület. Legyen v egy olyan, véges sok null-hellyel rendelkező folytonos vektormező Ω-n, melynek a peremen nincs null-helye, sőt ott mindig kifelé mutat.

15.3.1. definíció. Szorítsuk meg a $v/|v|\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ leképezést a P null-hely körüli kis ϵ sugarú gömbfelületre. Ekkor egy $S^{n-1}(P,\epsilon) \to S^{n-1}$ leképezést kapunk. Ennek foka a v mező P-beli *indexe*. (Ennek során $S^{n-1}(P,\epsilon)$-t a külső normálissal irányítjuk.) Egy irányított hiperfelület *Gauss leképezése* pedig nem más, mint a hiperfelületnek az egységgömbbe való (az irányítás által meghatározott) egységnyi normálvektor által megadott leképezése. (Egy x pont képe tehát: az x-beli normálvektort elvisszük párhuzamosan az origóba, s tekintjük ennek végpontját az origó körüli egységgömbön.)

15.3.2. tétel. *Egy fenti Ω és v esetén a null-helyekben vett indexek összege minden ilyen v mezőre ugyanaz, éspedig megegyezik a perem Gauss leképezésének a fokával.*

Bizonyítás. Ha egy kompakt, peremes irányított n-dimenziós sokaságot képezünk le egy $(n-1)$-dimenziós, zárt, irányítottba, akkor a peremre vett megszorítás foka nulla. Alkalmazzuk ezt az $\Omega^* = \Omega \setminus \{$a null-helyek kis ϵ-környezetei$\}$ peremes sokaságra és a v leképezésre. Vegyük még észre, hogy Ω peremén a v és a Gauss leképezés homotópok, másrészt a null-helyek körüli gömbökön most az irányítás ellentétes, mint az index definiciójánál. □

15.3.3. definíció. Legyen $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ egy sima sokaság. Azt mondjuk, hogy M^n-en egy folytonos érintővektormező adott, ha minden $x \in M^n$ pontra adott egy $v(x) \in T_xM^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ érintővektor, mely egy $v\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ folytonos leképezést ad. Tegyük fel, hogy a v-nek véges sok null-helye van. Minden P null-helynél a v mező indexét úgy definiáljuk, hogy levetítjük a P pont M^n-beli kis környezetét T_PM^n-be és ennek az immár eukildeszi térbeli mezőnek tekintjük az indexét P-ben.

15.3.4. tétel. (Poincaré-Hopf) *Legyen M^n egy tetszőleges zárt sima sokaság, és v egy folytonos érintővektormező véges sok null-hellyel. Ekkor a null-helyekben vett indexek összege megegyezik az M^n sokaság Euler-karakterisztikájával.*

Bizonyítás. Legyen M^n az $\mathbb{R}^{n+k}$ euklideszi térbe beágyazva. Terjesszük ki az M^n-en adott v vektormezőt egy w, az M^n egy T kis (csőszerű) ϵ-környezetén adott vektormezővé a következő formulával: $x \in T$-re legyen $r(x)$ az M^n sokaság x-hez legközelebbi pontja. Legyen tehát $w(x) = v(r(x)) + (x - r(x))$. A w vektormezőre a T tartományon alkalmazható a fenti Hopf tétel (15.2.3), hiszen w a T peremén nyilván kifelé mutat. Másrészt a w null-helyei nyilván megegyeznek a v null-helyeivel, sőt — mint ezt a 15.3.5 lemmában alább belátjuk – egy ilyen null-helyen v és w indexei megegyeznek. Ilymódon végülis azt kapjuk, hogy M-en bármely v vektormezőre (melynek véges sok null-helye van) a null-helyek indexeinek összege mindig ugyanannyi. Ezek után mutatunk M egy tetszőleges triangulációjához egy olyan vektormezőt, melynek null-helyei pontosan a trianguláció szimplexeinek baricentrumai (azaz súlypontjai) éspedig egy i dimenziós szimplex súlypontjában a null-hely indexe $(-1)^i$ lesz. Ez utóbbi állítás már bizonyítani fogja a poincaré-Hopf tételt. Előbb azonban lássuk a lemmát.

15.3.5. lemma. *Legyen P a v és w fenti vektormezők közös null-helye. Ekkor a $v(P)$ index megegyezik $w(P)$-vel.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy x egy környezetében M^n megegyezik az érintőterével. Ekkor a w vektormező az $S^{n-1}(P,\epsilon) = S^{n+k-1}(P,\epsilon) \cap M^n$ pontokban az $(x,y) \mapsto v(x) + y$ fomrulával adható meg, ahol $x \in M^n$ és y merőleges M^n-re. Itt tehát a v-nél és a w-nél vett ősök és az azokban vett előjelek megegyeznek. Másrészt $S^{n-1}(P,\epsilon$-on kívül nincs "vízszintes" (azaz T_PM^n-nel párhuzamos) vektor. Részletezve: legyen $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k$ a P pont egy környezetével azonosítva úgy, hogy az origó P-nek, az $\mathbb{R}^n \oplus \{0\}$ altér pedig a P pont egy M^n-beli környeztének felel meg. A v vektormezőről feltesszük, hogy normált, tehát (a fenti azonosítások után) egy $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ leképezést ad. A w (szintén normált) vektormezőt felbontjuk egy-egy $\tilde{w}\colon \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to S^{n-1} \times D^k \cup D^n \times S^{k-1}$ és $\varphi\colon S^{n-1} \times D^k \cup D^n \times S^{k-1} \to S^{n+k-1}$ leképezés kompozíciójára, ahol $\tilde{w}(x,y) = (v(x), y)$ ha $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$ és $\varphi(x,y)$ az x,y irányú egységvektor. Ekkor nyilván $\deg\varphi = 1$ és így elég belátni, hogy $\deg\tilde{w} = \deg v$. Világos, hogy a $(x,y) \mapsto (v(x),y)$ leképezés derivált mátrixa egy blokk-diagonális mátrix lesz, az átlón $\frac{\partial v}{\partial x}$ és E_k mátrixszokkal; ezért ennek determinánsa ugyanaz lesz, mint a $\frac{\partial v}{\partial x}$ determinánsa. Tehát v és $\tilde{w}$ fokszáma megegyezik. A lenormált w vektormező foka szintén ugyanez lesz, hiszen a normálás egy 1 fokú leképezés az $\{\|x\| = 1, \|y\| \leq \varepsilon \text{ vagy } \|y\| = \varepsilon, \|x\| \leq 1\}$ feltételekkel definiált térből az egységömbre. $\square$

A 15.3.4 tétel bizonyításához végül megadunk egy olyan vektormezőt, melynek null-helyei a szimplexek súlyontjai és az index $(-1)^i$ minden i-dimenziós szimplex súlypontjában. Azonosítsuk a baricentrikus felbontás egy i-dimenziós szimplexét az $\mathbb{R}^i$ i-dimenziós euklideszi térben a következő szimplexszel: Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_i$ egy ortonormált bázis, és tekintsük az

$$0, e_1, e_1 + e_2, \ldots, e_1 + \ldots + e_i$$

pontok konvex burkát. Ezen szimplexen egy v vektormezőt definiálunk a következő formulával: A $t_1, \ldots, t_i$ pontban v értéke legyen:

$$v(t_1, \ldots, t_i) = \sum_{j=1}^{j=i} (t_j - t_j^2) e_j.$$

Ez a mező pontosan e szimplex csúcsaiban tűnik el és minden lapon benne fekszik az adott lapban. Ha a kiválasztott baricentrikus szimplex része egy nagyobbnak, akkor a nagyobból hasonló formulával nyerhető vektormező megegyezik a kisebbik szimplexen az ott ezen formulával definiált vektormezővel. Belátjuk, hogy ha a baricentrikus felbontás minden szimplexén így definiálunk egy vektormezőt, akkor a sokaságon kapott mező indexe az k-dimenziós baricentrumokban pontosan $(-1)^k$ lesz. Legyen x_0 egy k-dimenziós baricentrum, azaz egy k-dimenziós szimplex súlypontja. E szimplex lapja néhány n-dimenziós szimplexnek. Tekinsünk ezek közül egyet és végezzük el a fenti azonosítást; ekkor x_0 az $e_1 + \ldots + e_k$ vektorral lesz azonosítva. Komponáljuk a v mezőt azon leképezéssel, mely megváltoztatja $\mathbb{R}^n$ első k koordinátájának az előjelét; ez nyilván egy $(-1)^k$ fokú leképezés. Ha tehát a kapott v_k mező indexe x_0-ban 1, akkor az eredeti v-é $(-1)^k$. Az x_0 koordinátái $(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, ahol k darab 1 és $n-k$ darab 0 áll. Legyen x egy tetszőleges x_0-hoz közeli pont és legyenek x koordinátái $(t_1, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots, t_n)$, ahol $1 \geq t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_k \geq 1 - \varepsilon$ és $\varepsilon \geq t_{k+1} \geq \ldots \geq t_n \geq 0$. Ahhoz, hogy belássuk, hogy a v_k mező indexe x_0-ban 1, elég belátni azt, hogy a $\langle v_k(x), x - x_0 \rangle$ skalárszorzat egy x_0 körüli kis gömbfelületen mindenütt pozitív. A fenti formulák szerint ezen skaláris szorzat egyenlő a

$$\sum_{j=1}^{k} (t_j^2 - t_j)(t_j - 1) + \sum_{j=k+1}^{n} (t_j - t_j^2)(-1)$$

kifejezéssel. Ez pedig minden szóbajövő $t_1, \ldots t_n$ koordinátákra pozitív, így beláttuk azt, hogy v indexe a baricentrumban $(-1)^k$. Evvel pedig — az Euler-karakterisztika definíciója értelmében — a Ponicaré-Hopf tétel bizonyítása kész. □

15.3.6. következmény. *Páratlan dimenziós zárt sokaság Euler karakterisztikája nulla.*

Bizonyítás. Legyen v egy tetszőleges vektormező véges sok null-hellyel. (A bizonyítás utolsó lépése szerint ilyen létezik.) A tétel szerint a null-helyek indexeinek összege az Euler karakterisztika. Ám ugyanez igaz a $-v$ vektormezőre is. Viszont annak a null-helyei ugyanazok, a null-helyek indexei pedig (mivel a sokaság páratlan dimenziós) (-1)-szeresek. □

15.3.7. következmény. *Ha egy M^n zárt, sima sokaság Euler karakterisztikája páratlan, akkor nem pereme semmilyen sima kompakt sokaságnak. Speciálisan $\mathbb{RP}^{2n}$ nem null-kobordáns (azaz nem pereme semmilyen kompakt sima sokaságnak).*

Bizonyítás. (Ugyanúgy megy, mint $\mathbb{RP}^2$- re.) Ha $M^n = \partial W^{n+1}$, akkor legyen $DW^{n+1} = W^{n+1} \cup_{M^n} W^{n+1}$. Ekkor $\chi(DW^{n+1}) = 2\chi(W^{n+1}) - \chi(M^n)$. Másrészt az előző következmény szerint n páros (hiszen $\chi(M^n) \neq 0$), így DW^{n+1} egy zárt, páratlan dimenziós sokaság tehát $\chi(DW^{n+1}) = 0$. □

15.4 A Borsuk-Ulam tétel

15.4.1. tétel. (Borsuk-Ulam) *Legyen $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ egy folytonos leképezés. Ekkor létezik olyan $x \in S^n$ melyre $f(x) = f(-x)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f(x) \neq f(-x)$ minden $x \in S^n$-re. Ekkor egy

$$g(x) = \tfrac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}\colon S^n \to S^{n-1}$$

leképezés definiálható, mely páratlan, azaz $g(-x) = -g(x)$. Legyen S^{n-1} az S^n egyenlítője. Ekkor a $g|S^{n-1}\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ megszorítás null-homotóp, hiszen kiterjed például az S^n felső félgömbjére, ami a D^n golyóval homeomorf. Másrészt a $g|S^{n-1}\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ leképezés páratlan és belátjuk, hogy egy ilyen leképezés foka mindig páratlan.

15.4.2. lemma. *Minden páratlan $g\colon S^k \to S^k$ leképezés foka páratlan.*

Bizonyítás. Nevezzük a $g\colon S^k \to S^k$ leképezést *szépnek*, ha az S^{k-1} egyenlítőn megegyezik az identitással. Először legyen g ilyen. Tekintsük az $S^k \cup S^k$ két diszjunkt gömb azon h leképezését az S^k gömbbe, mely az első gömbön a g a másodikon az identitás. Világos, hogy $\deg h = \deg g + 1$. Másrészt tekintsük azt a másik

$h^*: S^k \cup S^k \to S^k$ leképezést, mely a h-ból az alsó félgömbök kicserélésével áll elő. Az így kapott leképezés foka nyilván páros, hiszen ha $h_1: S^k \to S^k$ a h^* megszorítása az első gömbre, akkor a másodikra a megszorítása $h_2(x) = -h_1(-x)$, így $\deg h_2 = (-1)^{k+1} \cdot \deg h_1 \cdot (-1)^{k+1} = \deg h_1$. Mivel nyilván $\deg h = \deg h^*$, azaz $\deg g + 1 = 2 \deg h_1$, azt kapjuk, hogy $\deg g$ páratlan.

Legyen most g egy tetszőleges páratlan leképezés. Belátjuk, hogy egy ilyen leképezés mindig homotóp egy páratlan szép leképezéssel. Ez következik az alábbi általánosabb lemmából.

15.4.3. lemma. *1. Legyen A és Y két szimpliciális komplexus, melyeken rendre adottak az α és β szimpliciális szabad involuciók. (Egy involució az egy olyan homeomorfizmus, melyet önmagával komponálva az identitást kapjuk. Egy ilyen involució szabad, ha nincs fixpontja.) Legyen továbbá* $\dim\ A \le k-1$, *ahol Y $(k-1)$-összefüggő, azaz minden $i < k$ esetén $\pi_i(Y) = 0$. Legyen f és g az A-nak két tetszőleges ekvivariáns leképezése Y-ba, azaz $f \circ \alpha = \beta \circ f$ és $g \circ \alpha = \beta \circ g$. Ekkor f és g ekvivariánsan homotópok, azaz létezik egy őket összekötő H_t homotópia, mely minden t-re ekvivariáns.*

2. Legyen most X egy olyan szimpliciális komplexus, melynek A részkomplexusa, legyen az α szimpliciális involució X-en fixpont mentes és legyen A egy invariáns altér (azaz $\alpha(A) \subset A$). Legyen továbbá $g: X \to Y$ ekvivariáns leképezés, melynek A-ra vett megszorítása ekvivariánsan homotóp egy $f: A \to Y$ leképezéssel. Ekkor g ekvivariánsan homotóp egy olyan leképezéssel, mely A-n megegyezik f-fel.

Bizonyítás. Mindkét állítás könnyen belátható a leképezések szimplexről szimplexre történő kiterjesztésével. (Először a 0-dimenziós szimplexekre, majd az 1-dimenziósakra s így tovább az egyre nagyobb dimenziós szimplexekre. Az involuciónál az egymásnak megfelelő szimplexekre egyidejűleg terjesztjük ki a leképezést, ügyelve arra, hogy mindig ekvivariáns leképezést kapjunk.) □

Alkalmazva a 15.4.3 lemma első pontját ($A = S^{k-1}$, $Y = S^k$ szereposztással) azt kapjuk hogy egy tetszőleges páratlan $S^k \to S^k$ leképezés megszorítása az egyenlítőre ekvivariánsan homotóp az identitás megszorításával. Majd a második pontot ($X = S^k$-val) alkalmazva azt kapjuk, hogy ez a homotópia kiterjed a g és egy szép leképezés közti homotópiává. Evvel a 15.4.2 lemma bizonyítását befejeztük. □

Evvel pedig a 15.4.1 tétel bizonyítása is teljes. □

15.5 Feladatok

1. Lássuk be, hogy S^n-en nem létezik páros sehol sem nulla érintő vektormező. (Egy vektormező páros, ha az átellenes pontokban ugyanaz a vektormező értéke.)
2. Bizonyítsuk be hogy a páratlan dimenziós projektív terek mind peremei kompakt peremes sokaságoknak.
3. Számítsuk ki az $f: S^1 \to S^1$ leképezés fokát, ahol $f(z) = z^k$ (és $|z| = 1$).
4. Legyen $f: SU(n) \to SU(n)$ a köbre emelő leképezés, azaz minden $g \in SU(n)$-re legyen $f(g) = g^3$. Határozzuk meg f fokát.
5. Igazoljuk, hogy a $g \circ f$ kompozíció foka a $\deg f \colon \deg g$ szorzattal egyenlő.
6. Lássuk be, hogy a deg fokszám egy csoportizomorfizmust ad meg $\pi_1(S^1)$ és $\mathbb{Z}$ között.

16. fejezet

Vizsgafeladatok a 2. félév után

1. Legyen S^3 az egységnyi hosszúságú kvaterniók tere. Mi az $x \mapsto x^3$ leképezés foka ($x \in S^3$)?
2. Igaz-e az Algebra Alaptétele a kvaterniók körében?
3. Bizonyítsuk be, hogy topologikus csoport univerzális fedőtere is topologikus csoport.
4. Legyen $X = S^2 \cup \overline{ED}$, ahol $\overline{ED}$ az S^2 egy átmérője. Mi lesz$\pi_1(X)$?
5. (a) Az X zárt 2-dimenziós irányítható felületen létezik olyan vektormező, melynek nullhelyei egy zárt görbét alkotnak és ennek környezetében a vektormező mindig a görbe felé mutat. Mi ez az X felület ?

   (b) Egy M^3 zárt irányítható 3-dimenziós sokaságon adott egy vektormező, mely csak egy zárt $F^2 \subset M^3$ felület mentén nulla, és e felület közelében a vektormező a felület felé mutat. Mi lehet az F felület?
6. Létezik-e $\mathbb{RP}^n$-en nem nulla érintővektormező?
7. (a) Létezik-e $T^2 \to \mathbb{R}^2$ immerzió?

   (b) Létezik-e $A_2 \to T^2$ immerzió?

   (c) Létezik-e $T^2 \to A_2$ immerzió?
8. Lássuk be, hogy ha $\chi(M^n) = 0$, akkor M-en létezik sehol sem nulla vektormező.
9. Bizonyítsuk be, hogy ha $f\colon S^n \to S^n$-re $\deg f$ párartlan, akkor létezik olyan $x \in S^n$ melyre $f(x) = -f(-x)$.
10. Lássuk be, hogy minden $f\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ leképezésre létezik olyan x, melyre $f(x) = x$.
11. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges csomó csoportjának kommutáltja $\mathbb{Z}$-vel izomorf.
12. Lássuk be, hogy egy kompakt, n-dimenziós, egyszeresen összefüggő sokaság n-dimenziós sokaságba való immerziója mindig diffeomorfizmus.
13. (a) Létezik-e $\mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^1$ retrakció?

    (b) Létezik-e $\mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^{n-1}$ retrakció?

    (c) Létezik-e $\mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^{n-1}$ retrakció?
14. Legyen az M^2 kompakt peremes felület $A_p \setminus \operatorname{int} D^2$ valamely p-re, és legyen $f\colon M^2 \to \mathbb{R}^2$ egy immerzió. Mi lesz az $f|\partial M^2$ homotópia-osztálya $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$-ban ?
15. Egy "tipikus" függvény egy M^2 felületen egy kritikus pont körül $\pm(x^2+y^2)$ vagy x^2-y^2 alakú (megfelelően választott koordinátarendszerben). Mi a kapcsolat a háromféle kritikus pontok száma között?
16. Lássuk be, hogy $SO(4)$ homeomorf $S^3 \times SO(3)$-mal.

17. Bizonyítsuk be, hogy ha egy szalagot egyszer megcsavarunk a hossztengelye körül, akkor nem lehet kiegyenesíteni végeinek párhuzamos eltolásaival.

18. Legyen F^2 zárt irányítható felület, $f_n: F^2 \to F^2$ pedig folytonos leképezések olyan sorozata, mely egyenletesen tart az identitáshoz és egyik f_n-nek sincs fixpontja. Mi ez a felület?

19. Számítsuk ki a 3-as gyűrű (= Hopf fibrálás három fibruma) komplementumának fundamentális csoportját. (Válasz: $F_2 \times \mathbb{Z}$.)

20. Lássuk be, hogy ha M^3 irányítható 3-sokaság Heegaard génusza g, akkor létezik $\pi_1(M^3)$-nak olyan prezentációja, melyben g generátor és g reláció van.

21. Mit kapunk akkor, ha 4 Möbius szalagot összeragasztunk úgy, hogy a peremei egy három egybevágó körcikkre osztott körben a körnek illetve az egyes körcikkeknek a peremeire mennek?

17. fejezet

Jelölések

$P(X) = X$ hatványhalmaza, azaz részhalmazainak halmaza (más jelölés: 2^X)
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$
$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$
$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$

Irodalomjegyzék

[HH] Hajnal-Hamburger: *Halmazelmélet*, Tankönyvkiadó, 1983.

[M] W. S. Massey: *Algebraic Topology: An introduction*, Springer-Verlag, 1989.