

# BEVEZETÉS A TOPOLÓGIÁBA

4. gyakorlat, 2009. március 4.

Vértesi Vera <wera@szit.bme.hu>

<http://www.szit.bme.hu/~wera>

1. Mutass folytonos bijekciót, ami nem homeomorfizmus. Mutass ilyen  $\mathbb{R}^n$  részhalmazai között is.
2. Legyen  $U$  „szép nyílt”, ha  $U = \text{int}\bar{U}$ . Melyik igaz?
  - (a)  $F$  zárt  $\Rightarrow \text{int}F$  „szép nyílt”;
  - (b)  $U, V$  „szép nyílt”  $\Rightarrow U \cap V$  „szép nyílt”;
  - (c)  $U, V$  „szép nyílt”  $\Rightarrow U \cup V$  „szép nyílt”;
  - (d)  $U, V$  „szép nyílt”  $\Rightarrow (U \subset V \iff \bar{U} \subset \bar{V})$ .
3. Egy  $(X, \leq)$  rendezett halmaz sűrűn rendezett, ha  $\forall a, b \in X \exists x, y, z \in X : x < a < y < b < z$ . Bizonyítsuk be, hogy bármely két megszámlálható sűrűn rendezett halmaz izomorf.
4.  $A \subset X$ .  $A' := \{\text{a torlódási pontok halmaza}\}$ . Adj példát olyan  $A$ -ra, melyre  $A^{(n+1)} \neq A^{(n)}$ .
5. A Cantor halmaz:  $C = \{x \in [0, 1] : \text{legalább az egyik 3-as számrendszerbeli felírásában nem szerepel az 1-es számjegy}\}$ . Bizonyítsd be, hogy  $C$  zárt.
6. Egy  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek csak megszámlálható lokális maximumértéke lehet.
7. Lehet-e a  $[0, 1]$  minden pontja fölé diszjunk  $T$  betűket rajzolni a síkban.
8. Adj egyszerű bizonyítást az Uriszon Lemmára metrikus terekben.

## csomóelmélet

Egy vetület metszési száma = a kettőspontok száma. Egy  $K$  csomó *metszési száma*,  $c(K)$ , a legkevesebb metszéspontú vetület metszési száma.

9. Rajzold le az összes legfeljebb 1,2,3 és 4 metszési számú csomót! (még sajnos nem tudjuk belátni, hogy a lerajzolások minimális metszésszámúak és tényleg különbözőek)
10. Bizonyítsd be, hogy minden vetületből néhány metszés megváltoztatásával (alul  $\leftrightarrow$  felül) megkapható a triviális csomó.

Egy vetület kibogozási száma = a minimálisan megváltoztatandó metszések száma. Egy  $K$  csomó *kibogozási száma*,  $u(K)$ , a legkevesebb kibogozási számú vetület kibogozási száma.

11. Igaz-e, hogy egy minimális metszésszámú vetület kibogozási száma is minimális?