Bevezetés a topológiába

1. gyakorlat, 2009. február 11.

Vértesi Vera <wera@szit.bme.hu>

http://www.szit.bme.hu/~wera

1. definíció Egy $v : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ vektormező körülfordulási száma:

$$k_v = \frac{\sum_{i=1}^{n} (v(x_i), v(x_{i+1}))\angle}{2\pi}$$

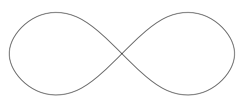
A fenti képletben $x_1, \ldots, x_n$ pontok az S^1 körvonal egy olyan sürű felosztását adják, melyre ($\forall i \in \mathbb{Z}_n$) az x_i és x_{i+1} ív által meghatározott (rövidebbik) ív bármely két pontjához rendelt vektorok szöge kisebb mint $\frac{\pi}{2}$.

1. Bizonyítsd be, hogy k_v jóldefiniált, azaz független az x_i pontok választásától.
2. Bizonyítsd be, hogy $k_v \in \mathbb{Z}$.
3. Legyen a körvonal a komplex számsík egységköre: $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \to$. Mennyi a körülfordulási száma a $v_1(z) = 1$, $v_2(z) = z$, $v_3(z) = iz$, $v_4(z) = z^2$ és a $v_5(z) = z^n$ vektormezőknek?
4. Bizonyítsd be, hogy ha $u(x)$ és $v(x)$ által bezárt szög minden $x \in S^1$-re legfeljebb $\frac{\pi}{2}$, akkor $k_u = k_v$.

2. definíció $v : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ vektormező. Rögzítsünk egy $x_0 \in S^1$ pontot és vágjuk szét a kört x_0 mentén: $S^1 \setminus x_0 = [0, 2\pi] = I$ és tekintsünk egy folytonos $\arg(v) : I \to \mathbb{R}$ függvényt, mely minden x ponthoz a $(v(x_0), v(x))\angle$ szöget rendeli hozzá (a szög csak $\mod 2\pi$ erejéig jóldefiniált) és $\arg(v)(0) = 0$. Ekkor v körülfordulási száma $k_v = \frac{v(2\pi)}{2\pi}$.

5. Bizonyítsd be, hogy a fenti két definíció ekvivalens.
6. Tudsz-e még egyszerűbben számítható képletet adni k_v-ra? (*Segítség*: $\arg(2\pi)$ magasságát, lehet úgy mérni, hogy megszámoljuk, hogy $\arg(x)$ hány $2k\pi + \pi$ egyenest metsz monoton növően, és hányat monoton csökkenően. Hogy lehet ezt rögtön $v(x)$-ről leolvasni?)

Egy $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ (esetleg önmagát metsző) síkgörbe menti $v : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ vektormezőt úgy képzelhetünk el, hogy a görbe minden $t \in S^1$ pontra a $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ kezdőponttal rajzoljuk a v vektort. A v vektormező γ menti a körülfordulási száma: $I_\gamma(v) = k_v$



7. Mennyi a körülfordulási száma a következő ábra érintővektorainak? (Próbáld meg lerajzolni a vektorokat S^1-re!)
8. Bizonyítsd be, hogy ha adott egy nemnulla vektormező az egész D^2 körlapon, akkor a peremen a körülfordulási szám 0.
9. Bizonyítsd be, hogy ha egy egész körgyűrűn adott egy nemnulla vektormező, akkor a két peremkomponensen megegyezik a körülfordulási szám.

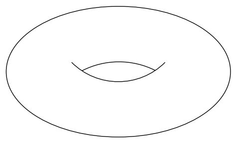
10. Legyen $A = D^2 - \{\text{néhány kis körlap}\}$, ekkor A határa néhány diszjunkt körvonalból áll. Jelölje a nagy körlap határát $\gamma = \partial D^2$, a kisebbekét pedig $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Bizonyítsd be, hogy $\sum I_{\gamma_i}(v) = I_\gamma(v)$.

11. Lehet-e nadrágot (=kétlukú kört) úgy önmagába képezni, hogy a perem minden komponense önmagába menjen és ne legyen fixpont.

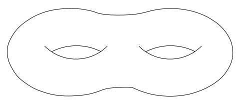
12. Próbáld meg S^2-t minél kevesebb „forgóval” megfésülni!

13. Egy „forgó” körüli kis körön van egy nemnulla vektormező. E vektormező forgási száma a forgó indexe. Számítsd ki az előző feladatbeli fésülések forgóinak indexét.

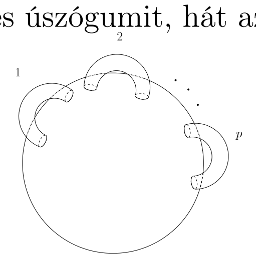
14. Meg tudod-e fésülni a tóruszt? Meg tudod-e fésülni a kétszemélyes úszógumit, hát az A_p felületet?



tórusz



kétszemélyes úszógumi



A_p