

Információelmélet zrt helyi

2009. október 29.

A megoldásokhoz rtszletes indoklást krnk. Minden eladson elhangzott vagy a jegyzetben megtallhat? llt? felhasznlhat? megfelel? hivatkozssal.

1. feladat. Legyen $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ s $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ két valsznsgeloszlás, s definieljuk a két eloszlás közötti „információsvolsgot” a

$$D(\mathbf{p}|\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{p_i}{q_i}$$

kifejezssel. Lssuk be a következő tulajdonságokat:

- Barmely két eloszlásra, $D(\mathbf{p}|\mathbf{q})$ s egyenlősg pontosan akkor teljesl, ha $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.
- $H(\mathbf{p}) = \log n - D(\mathbf{p}|\mathbf{u})$, ahol $H(\mathbf{p})$ jelli a \mathbf{p} eloszlás entrpijét, \mathbf{u} pedig az egyenletes eloszlást az $\{1, \dots, n\}$ halmazon.

2. feladat. Legyenek X s Z bináris (0-1 értékes) független valószínűségi változók, így, hogy $\mathbf{P}\{X = 1\} = p$ s $\mathbf{P}\{Z = 1\} = \frac{1}{2}$. Legyen $Y = X \oplus Z$, ahol \oplus modulo 2 összeadást jelöl. X felfogható, mint titkosítandó üzenet, Z a titkos kulcs, s Y a rejtjelezett üzenet. Számolja ki a következő mennyiségeket s magyarulza meg jelentésüket a titkosítás szempontjából: $H(X), H(X|Z), H(X|Y), H(X|Y, Z)$.

3. feladat. Legyen $\mathbb{X} = X_1, X_2, \dots$ egy bináris, emlkezettlki stacionárius forrás, amelyre $\mathbf{P}\{X_1 = 1\} = 10^{-6}$. Adjuk meg az \mathbb{X} egy olyan változó szóhosszúságú blokk-kódját, melynek betnknti átlagos kódszóhossza kisebb, mint $\frac{1}{10}$.

4. feladat. Legyenek X_1, \dots, X_n bináris valószínűségi változók. Jelölje $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots)$ az egyes szimbólumok elfordulásainak futamhosszait. Tehet pldül az 1110010001111 sorozathoz az $\mathbf{R} = (3, 2, 1, 3, 4)$ tartozik. Hogyan viszonyul egymáshoz $H(X_1, \dots, X_n)$, $H(\mathbf{R})$ s $H(\mathbf{R}, X_n)$?

5. feladat. Legyen a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett h függvény (bináris entrpiáfüggvény) értéke

$$h(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x)$$

ha $x \in (0, 1)$, s $h(0) = h(1) = 0$. Mutassuk meg, hogy h rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- szimmetrikus az $\frac{1}{2}$ pontra;
- $[0, 1]$ minden pontjában folytonos;
- $[0, \frac{1}{2}]$ -ben szigorúan monoton növekvő;
- szigorúan konkáv.