A II. fejezet feladatai

Kulcsszavak: valószínűségi változó, eloszlásfüggvény, diszkrét eloszlás, sűrűségfüggvény, nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások, valószínűségi változók transzformációja, várható érték, szórás, szórásnégyzet, momentum.

II.1 Az egységnényzeten találomra kiválasztunk egy P pontot. Jelölje X a P és a hozzá legközelebb álló csúcs távolsá gát. Adja meg X eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

II.2 Legyen $X \in E(\lambda)$ és $Y = X^2$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét!

II.3 Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$.
Legyenek $Y = \max\{0, X\}$, $Z = \min\{0, -X\}$, $V = |X|$, és $W = -X$.
Fejezze ki Y, Z, V és W eloszlásfüggvényeit $F(x)$-szel!

II.4 A $(0,1)$ intervallumban kijelölünk három pontot véletlenszerűen. Határozzuk meg a középső pont 0 $-$tól való távolságának eloszlásfüggvényét!

II.5 Egy 32 lapos magyar kártyakötegből kihúzunk egy lapot. Legyen X a kihúzott lap értéke. Adja meg és ábrázolja X eloszlásfüggvényét! Számolja ki a $7,5 < X < 10,2$ esemény valószínűségét!

II.6 Legyen $X \in U(0,1)$, és $Y = \sqrt{2X}$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét!

II.7 Egy háztartási gép gyári önköltsége 10 000 Ft. A termékre a gyár 1 év garanciát ad, ami szerint a hibás gépet ingyen kicseréli, amennyiben az 1 éven belül meghibásodik. A gyár szakemberei szerint a gép élettartama 30 év várható értékű exponenciális eloszlású. A termelői ár a gép önköltsége plussz a garanciális cserék önköltségének várható értéke. Mekkora legyen a termelői ár?

II.8 $X \in E(2)$ segítségével generáljon egy $Y \in G\left(\frac{1}{3}\right)$ valószínűségi változót!

II.9 Egy gyártmánynak az 1%-a selejtes. A darabokat ezresével dobozokba csomagolják. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott dobozban nincs háromnál több hibás?

II.10 Egy szabályos pénzérmét addig dobunk fel újra és újra, míg meg nem kapjuk a második *fej*et is. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első *fej* után a második *fej*ig ugyanannyi dobásra van szükség, mint ahány dobás kellett az első *fej*ig?

II.11 Tekintsük az $f(x) = \frac{3x^2}{7}$, $x \in [1,2]$ sűrűségfüggvényt! Az $X \in U(0,1)$ segítségével állítsunk elő olyan Y valószínűségi változót, amelynek sűrűségfüggvénye éppen $f(x)$!

II.12 Milyen b értéknél lesz az $f(x) = b\sqrt{x-2}$, $x \in (2,3)$ függvény sűrűségfüggvény?

II.13 Egy normális eloszlású valószínűségi változó $0,1$ valószínűséggel vesz fel $10,2$-nél kisebb értéket, és $0,25$ valószínűséggel $13,6$-nál nagyobb értéket. Mennyi a várható értéke és szórása?

II.14 Egy számítógépes szervízben egy hónap húsz munkanapjából átlagosan kettőn nincsen reklamáció. Poisson eloszlást feltételezve, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon három, vagy háromnál több reklamáció érkezik?

II.15 Legyen $X \in U(-1,2)$ és $Y = X^n$. Adja meg Y eloszlásfüggvényét!

II.16 Egy üteg addig tüzel egy célpontra, amíg el nem találja. A találat valószínűsége minden lövésnél p. Mennyi az egy találathoz szükséges átlagos lőszerkészlet, a muníció?

II.17 Az A könyvben az egy oldalon található sajtóhibák száma $X \in Po(\lambda)$, míg a B könyvben ugyanez $Y \in Po(\mu)$. Igaz lehet-e a következő két állítás egyszerre: *(i)* Az A könyvben háromszor annyi sajtóhiba van, mint a B könyvben. *(ii)* A B könyvben ötször akkora a hibamentes oldalnak a valószínűsége, mint az A könyvben?

II.18 A boltban árult izzók 1%-a hibás. Ha veszünk 100 darabot, akkor hány darab lesz benne rossz a legnagyobb valószínűséggel, és mekkora ez a valószínűség?

II.19 Egy 1MFt önköltségű számítógép termelői árát kell meghatározni. A számítógép élettartama exponenciális eloszlású 10 év várható értékkel. Garanciát vállalunk úgy, hogy ha az első évben a gép elromlik, akkor kicseréljük, ha a második is elromlik egy éven belül, akkor visszaadjuk a gép árát. A termelői ár legyen az az érték, mely mellett a kiadás és a bevétel várható értéke megegyezik. (A visszavett gépek értéktelenek.)

II.20 Egy mérés elvégzéséhez két lehetőségünk van. Vagy egy drága készülékkel mérünk egyet, ahol a mérés hibája $N(0,1)$ eloszlású, vagy egy olcsó készülékkel mérünk háromszor, és a méréseredményeket átlagoljuk, ahol vi szont a mérés hibája már $N\left(0,\ 1,6\right)$ eloszlású. Melyik mérési technika adja a pontosabb mérést?

II.21 Egy dobozban 7 db, a szivárvány hét színével egyező színű golyók vannak. Addig húzzuk ki a golyókat visszatevéssel a dobozból, amíg valamennyi színű golyót ki nem húztuk egyszer. Mi az ehhez szükséges X húzásszám eloszlása?

II.22 Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, sűrűségfüggvénye pedig $f(x)$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{E}F(X) = \frac{1}{2}$.

II.23 Legyen X logisztikus eloszlású, azaz sűrűségfüggvénye:
$f_X(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Számolja ki az X mediánját, vagyis azt az M_X számot, amelyre
$\mathbf{P}(X < M_X) = \mathbf{P}(X \geq M_X) = \frac{1}{2}$ teljesül.

II.24 Legyen $X \in \{0,1,2,\dots\}$ olyan valószínűségi változó, melynek létezik a várható értéke. Bizonyítsa be, hogy
$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq i)$.

II.25 Legyen az X valószínűségi változó olyan, hogy $\mathbf{P}(0 < X < 1) = 1$.
Bizonyítsa be, hogy $\boldsymbol{\sigma}^2 X < \mathbf{E}X$!

II.26 Egy baromfiudvarban a gondozó gyűrűjéről leeső értékes követ az egyik liba lenyelte. A gondozó kénytelen a libák levágásával megpróbálni a kő visszaszerzését. Addig vágja le a véletlenszerűen elkapott libákat, amíg valamelyik begyében meg nem találja a követ. Ha összesen 50 liba van a farmon, mennyi a kényszerűségből levágott libák számának várható értéke?

II.27 Legyen $Q = (a, b)$ az egységnégyzet egy véletlenül kiválasztott pontja. Jelölje X a Q pont origótól vet Euklideszi távolságát. Mi X sűrűségfüggvénye?

II.28 Legyen $X \in B\left(3, \frac{1}{4}\right)$, és $Y = X^3$. Mi Y eloszlása, és mennyi a várható értéke?

II.29 Az origóból kiindulva egy bolha ugrál a számegyenesen. Minden ugrásra egységnyi hosszú és a többitől függetlenül p valószínűséggel jobbra, $1 - p$ valószínűséggel balra történik. Az ötödik ugrás után megfigyeljük a bolha helyét. Adja meg ennek az eloszlását!

II.30 Az X normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke -5 és tudjuk, hogy $\mathbf{P}(-5 \leq X < 0) = 0,3$. Mennyi $\mathbf{P}(-5 < X < 4)$?

II.31 Létezik-e az $F(x) = x \ln x - x + 1,\ x \in [1, e]$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változónak második momentuma?

II.32 Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, \text{ ha } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2x}{3e^2}, \text{ ha } 1 < x \leq 2 \end{cases},$$

egyébként pedig $f_X(x) = 0$. Mennyi $\mathbf{E}X$?

II.33 Egy szabályos pénzérmét addig dobok fel ismételten, amíg két fejet, vagy két írást nem kapok. Mennyi a dobások számának várható értéke és szórása?

II.34 Legyen $X \in E(0, 1)$ és $Y = [X]$, azaz X egészrésze. Mennyi az Y diszkrét valószínűségi változó várható értéke és szórása?

II.35 Egy játékos rulettezik. Három tétet tesz meg: egy-egy 100 Ft-os zsetont tesz a fekete 13 számra, a fekete mezőre és a páratlan mezőre. Ötször megismételve ezt a stratégiát, mennyi a játékos nyereségének (veszteségének) várható értéke? (A rulettárcsán 0-tól 36-ig állnak a számok, 18 fekete, 18 piros, a 0-ás zöld színű. A fekete számok között 9 db páros és 9 db páratlan van. Ha valaki számra tesz, a tétet és még annak 36-szorosát seperi be. A fekete vagy páratlan mezőkön a nyereség kétszeres. A 0-ra nem lehet fogadni. Ha 0-ás pörög ki, minden megrakott tétet a bank viszi el.).

II.36 A 32 lapos magyar kártyacsomagból visszatevés nélkül addig húzunk, amíg piros színű lapot nem kapunk. Ezután folytatjuk a lapok húzását addig, amíg ászt nem kapunk. Jelölje X a kihúzott lapot számát! (Ha az összes kártya elfogyott közben, $X = 32$ lesz.) Adja meg a $\mathbf{P}(X = 3)$ valószínűséget!

II.37 Egy dobozban 1 piros 2 fehér és 3 piros színű golyó van. Visszatevés nélkül addig húzunk, amíg mindhárom színből nincs már legalább egy golyónk. Jelölje X a szükséges húzások számát! Adja meg X eloszlását és várható értékét!

II.38 Az α paraméter melyik értékénél lesz sűrűségfüggvény az $f(x) = \alpha(2x - x^2),\ x \in (0, 2)$? Adja meg ehhez a sű rűségfüggvényhez tartozó eloszlásfüggvényt!

II.39 Egy óbudai kisvendéglőben az a szokás, hogy a fogyasztás után a vendéggel feldobatnak három kockát, és ha tripla hatost dob, elengedik a számlát. Mekkora egy-egy vendég esetén az üzlet várható vesztesége, ha a fogyasztást Y-al lehet jellemezni Ft-ban, ahol $Y = X^2,\ X \in N(30, 10)$?

II.40 Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} A \cos \frac{x}{2} & , \text{ ha } \ 0 < x < \pi \\ 0 & , \quad \text{különben} \end{cases}.$$

a.) $A = ?$

b.) Írja fel az F_X eloszlásfüggvényt!

c.) $\mathbf{P}\left(X > \frac{\pi}{2}\right) = ?$

II.41 Legyen $X \in U(0, 1)$ és $Y = \operatorname{arctg} X$. Számolja ki Y sűrűségfüggvényét!

II.42 Eloszlásfüggvény-e az $F(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x})$?

II.43 Egy kockával dobunk. Jelölje X a dobott számértéket! Adja meg, és rajzolja fel az $Y = (X - 3)^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

II.44 Legyen $X \in Po(3)$ és $Y = X(X-1)(X-2)$. Számolja ki Y várható-értékét!

II.45 Addig dobunk egy szabályos kockával, amíg 3-nál kisebb számot nem kapunk. Jelölje X az ehhez szükséges dobások számát! Melyik valószínűség a nagyobb: $\mathbf{P}(2 \leq X \leq 3)$ vagy $\mathbf{P}(X \geq 3)$?

II.46 Legyen $X \in E(1)$ és $Y = \mathrm{e}^{-X}$. Számolja ki Y várható értékét és szórását!

II.47 Egy egységnyi oldalú szabályos háromszög kerületén véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot. Jelölje X a pontnak a súlyponttól vett távolságát! Számolja ki a $\mathbf{P}(X \geq 0,5)$ valószínűséget!

II.48 Egy hipermarket két bejáratánál elhelyeztek 1000-1000 ingyenes hirdetési újságot. Minden vásárló ugyanakkora valószínűséggel vehet el egy lapot bármelyik kupacból. Amikor a két rakás egyikében elfogy az utolsó újság is, a másik bejáratnál még X példány található. Adja meg X eloszlását!

II.49 Legyen $X \in U(0,1)$ és $Y = \ln \frac{1}{X}$. Számolja ki $\mathbf{E}Y$-et és $\sigma^2 Y$-t!

II.50 Az egységnégyzetben véletlenszerűen kiválasztunk n pontot. Jelölje X azon pontok számát, melyek ezek közül beleesnek az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú kör belsejébe is. Adja meg a $\mathbf{P}(X \leq 5)$ valószínűséget!

II.51 Legyen $X \in Po(2)$ és $Y = \left[\frac{X}{2}\right]$. Adja meg Y eloszlását!

II.52 A h paraméter milyen értékénél lesz sűrűségfüggvény
$f(x) = \frac{4h^2}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2 \cdot h^2}$, $x > 0$?

II.53 Egy üzemben gyártott harisnyák között átlagosan minden ezredik selejtes. A harisnyákat kétszázasával dobozokba csomagolják. 1000 dobozt véletlenszerűen kiválasztva, jelölje X az egyetlen selejtes harisnyát sem tartalmazó dobozok számát! Adja meg X várható értékét és szórásnégyzetét!

II.54 Hányszor kell feldobnunk egy szabályos pénzérmét ahhoz, hogy a „fejek száma 40 és 50 közé esik” esemény valószínűsége maximális legyen?

II.55 Egy 32 lapos kártyából addig húzunk, amíg ászt nem kapunk. Jelölje X az eközben kihúzott hetesek számát. Számolja ki a $\mathbf{P}(X = 0)$ valószínűséget!

II.56 Egy dobozban három piros és két fehér golyó van. Visszatevéssel tízszer húzunk a dobozból. Jelölje X a pirosak számát! Adja meg a
$Z = (X+2)(X-2)$ várható értékét!

II.57 Ha tudjuk, hogy $\mathbf{E}X = 1$ és $\sigma^2 X = 5$, akkor mennyi
a.) $\mathbf{E}(2+X)^2$ és b.) $\sigma^2(4+3X)$?

II.58 Az egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot véletlenszerűen. Jelöljük X-szel a két pont távolságát! Adja meg az $F_X(x)$ eloszlásfüggvényt!

II.59 Egy réten három szarvas legelészik gyanútlanul. Egymásról nem tudva három vadász lopakodik a tisztáshoz, és egyszerre tüzelnek a vadakra. Mindegyik lövés talál, és halálos.
Mennyi a lövések után a rétről elszaladó szarvasok számának várható értéke és szórása? (Elvileg több vadász is lőhet ugyanabba a szarvasba...)

II.60 Egy benzinkút hetente kap üzemanyagot. A heti fogyasztást az X jelöli 100 ezer literekben, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} 5(1-x)^2 & \text{, ha } 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}.$$

Mekkora legyen a tartály K kapacitása, hogy annak valószínűsége, hogy a hét során kifogy a benzin, kisebb legyen $0,01$-nél?

II.61 Legyenek $X \in N(m,D)$ és $Z = \left(\frac{X-m}{D}\right)^2$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét!

II.62 Igazolja, hogy ha $X \in B(n,p)$, akkor $\mathbf{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) \leq \frac{1}{(n+1)p}$!

II.63 Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek és $Z = \frac{X}{Y}$. Számolja ki a Z sűrűségfüggvényét!

II.64 Hányszor dobjunk egy kockával, hogyha azt akarjuk, hogy $\frac{1}{2}$-nél ne legyen kisebb annak a valószínűsége, hogy a 6-os dobások száma legalább kettő legyen?

II.65 Milyen c értékre lesz a következő függvény sűrűségfüggvény? Határozza meg azon változó várható értékét, amelynek a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} c\,e^{|x|} & x \in [-1,2] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

II.66 Egy normális eloszlású valószínűségi változó $0,2$ valószínűséggel vesz fel 10-nél kisebb értéket és $0,3$ valószínűséggel 14-nél nagyobb értéket. Mik az eloszlás paraméterei? ($\Phi(0,51) = 0,7$, $\Phi(0,89) = 0,8$).

II.67 Amerikában a hőmérsékletet Fahrenheit fokokban mérik. Az egyik államban megállapították, hogy az ottani X hőmérséklet eloszlása nyaranta $N(86,\ 4)$. Hogyan változik meg az eloszlás, ha áttérünk a Celsius-skálára? (A Fahrenheit és Celsius skála között az átváltási képlet: $\frac{5}{9}(X-32)\ [^oF] = Y\ [^oC]$).

II.68 Az autók fogyasztását Amerikában mérföld/gallon-ban (mpg) fejezik ki, azaz megadják hány mérföldet tesz meg a gépjármű egy gallon üzemanyaggal. Európában, mint ismeretes a fogyasztást liter/100 km formában adják meg. Egy Fordról tudjuk hogy az X mpg fogyasztását az $f(x)$ sűrűségfüggvény jellemzi. Hogyan kell transzformálnunk $f(x)$-et, ha áttérünk a liter/100 km skálára? (1 mérföld=a km, 1 gallon=b liter, ahol $a = 1,609$ és $b = 3,785$).

II.69 Adjuk meg a 90/5 lottón kihúzott öt szám közül a legkisebb eloszlásfüggvényének az értékét a 25 helyen.

II.70 Egy automata gép a beállítás szerint 2 kg lisztet adagol a zacskókba, de a technológia következtében a zacskóba került liszt mennyisége $N(m,\ 0,002)$ eloszlást követ. Előzetes megfigyelésekből lehet tudni, hogy $0,01$ annak a valószínűsége, hogy a zacskóban a liszt mennyisége kevesebb 2 kg-nál. m =?

II.71 Egy berendezés élettartama normális eloszlású 6,3 év várható értékkel és 2 év szórással. Hány év garanciát adjunk, hogy 0,95 legyen annak a valószínűsége, hogy a berendezés csak garanciális idő után hibásodik meg?

II. 72 Három kockával dobva, mennyi a dobott számok maximumának várható értéke? És mennyi a minimum várható értéke?

II. 73 Mutassuk meg, hogy az $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x \leq 1 \\ \frac{1+2x}{x-0,8}, \text{ ha } x > 1 \end{cases}$ függvény nem lehet eloszlásfüggvény!

II. 74 Egy csomag magyar kártyacsomagból találomra kihúzunk egy lapot. Vegye fel X a kártya pontértékét! (alsó:2, felső:3, király:4, ász:11, hetes:7, nyolcas:8, kilences:9, tízes:10). Adjuk meg és ábrázoljuk a eloszlásfüggvényét!

II. 75 A véletlen kisérlet az, hogy n darab dobozba véletlenszerűen golyókat helyezünk el úgy, hogy minden elhelyezésnél bármelyik doboz kiválasztása egyformán valószínű. Akkor állunk meg, ha észrevesszük, hogy az egyes számú dobozba bekerült az első golyó. Jelölje X a kísérlet befejeződésekor az elhelyezett golyók számát. Adjuk meg az X eloszlását!

II. 76 Mennyi a valószínűsége, hogy a hagyományos 90/5 lottóhúzás során valamennyi kihúzott szám páros lesz?

II. 77 Az egységnégyzeten kiválasztunk véletlenszerűen egy pontot. Jelölje X a pontnak a legközelebbi oldaltól vett távolságát. Adjuk meg az X valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

II. 78 Egy egységnyi hosszúságú szakaszt találomra választott pontjával két részre osztunk. Mi a keletkezett szakaszok közül a kisebbik hosszának sűrűségfüggvénye?

II. 79 Egy szobában öt telefon melyek közül bármelyik megszólalhat a többiektől teljesen függetlenül X időn belül, ahol X $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi az esélye annak, hogy egységnyi időn belül pontosan két telefonkészülék fog csörögni?

II. 80 Egy automata zacskókba cukorkát adagol. A zacskók X súlyát $\mu = 100$ (gramm),$\sigma = 2$ (gramm) paraméterű normális eloszlásúnak tekinthetjük. Mennyi a valószínűsége annak, hogy három véletlenszerűen kiválasztott zacskó között legalább egy olyan van, aminek a súlya 99 és 101 gramm közé fog esni?

II. 81 Legyen az X valószínűségi változó folytonos eloszlásfüggvénye olyan, hogy $1 > F(x) > 0$ esetben szigorúan monoton növekedő is. Bizonyítsa be, hogy ekkor az $Y = F(X)$ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon!

II. 82 Legyen az X valószínűségi változó folytonos eloszlásfüggvénye olyan, hogy $1 > F(x) > 0$ esetben szigorúan monoton növekedő is. Bizonyítsa be, hogy ekkor az $Y = \ln \frac{1}{F(X)}$ eloszlása $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális lesz!

II. 83 Ha az X standard normális eloszlású valószínűségi változó, mi a sűrűségfüggvénye az $Y = X^2$ valószínűségi változónak?

II. 84 Ha az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor mi a sűrűségfüggvénye az $Y = |X|$ valószínűségi változónak?

II. 85 Ha X λ-paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor mi az eloszlása az $Y = 2X + 1$ valószínűségi változónak?

II. 86 Ha az X a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, mi a sűrűségfüggvénye az $Y = \frac{1}{X}$ és a $Z = \frac{X}{1+X}$ valószínűségi változóknak?

II. 87 Ha az X, μ,σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó, mi a sűrűségfüggvénye az $Y = e^X$ valószínűségi változónak? (Y az ú.n. lognormális eloszlású valószínűségi változó).

II. 88 Ha X a $[0,2]$ intervallumon egyenletes eloszlású, akkor mi a sűrűségfüggvénye az $Y = |X - 1|$ valószínűségi változónak?

II. 89 Ha X λ-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor mi a sűrűségfüggvénye az $Y = 3X + 3$ valószínűségi változónak?

II. 90 Ha X λ-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor mi a sűrűségfüggvénye az $Y = \sqrt{X}$ valószínűségi változónak?

II. 91 Ha X λ-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor mi a sűrűségfüggvénye az $Y = \frac{1}{X^2}$ valószínűségi változónak?

II. 92 Egy szabályos pénzdarabbal végzünk dobásokat. A pénzfeldobást addig folytatjuk, amíg a dobások sorozatában mind a fej, mind az írások száma eléri a k számot. Jelölje X az ehhez szükséges dobások száma. Adja meg az X eloszlását!

II. 93 A $[0,1]$ szakaszon véletlenszerűen kiválasztunk két pontot. Legyen a két pont távolsága X. Adja meg X sűrűségfüggvényét!

II. 94 Az A paraméter milyen értékénél lesz az $f(x) = Ae^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$ függvény sűrűségfüggvény? Mennyi ekkor a várhatóérték és a szórásnégyzet?

II. 95 Egy autó X (km)-t tud defekt nélkül megtenni, ahol $X \in E(\lambda)$, azaz $\mathbf{P}(X < x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0$. Egy 12000 (km) hosszúságú úton mennyi annak a valószínűsége, hogy az autó legfeljebb egy defektet kap? ($\lambda = 10^{-4}$).

II. 96 Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes?

II. 97 Legyen $X \in N(\mu,\sigma)$. A paraméterek segítségével adjunk képletet az $\mathbf{E}X^n$ momentumra.

II. 98 Legyen $X \in N(0,1), Y = \cos X, Z = \sin X$. Adjuk meg Y és Z várható értékét és szórásnégyzetét!

II. 99 Az egyetemen nagyon sok telefonkészülék van, amelyek egymástól függetlenül romlanak el azonos valószínűséggel. Az év 360 napjából átlagosan 12 olyan nap van, hogy egyetlen készülék sem romlik el. Várhatóan, hány olyan nap lesz, amikor 2 vagy 2-nél több telefon romlik el?

II. 100 Az $X \in U(0,1)$ valószínűségi változó segítségével generáljunk $Y \in G(0,25)$ eloszlású valószínűségi változót!

II. 101 Egy képzeletbeli diktatúrában a "Nagy Testvér" az alábbi rendeleteket hozta:
1§ A hadsereg utánpótlásának biztosítása végett minden család köteles fiúgyereket szülni.
2§ A demográfiai robbanás elkerülése végett minden családban, ha már született fiú, több gyermek nem születhet.
Hogyan változtatja meg a "Nagy Testvér" ezen két rendelete a fiú-lány arányt?

II. 102 Legyen X Poisson eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, $Y = 2X + 1$. Adjuk meg Y várhatóértékét és szórásnégyzetét!

II. 103 Egy játékos 1023 zseton indulótőkével rulettezik. Az a stratégiája, hogy addig folytatja a játékot, amíg vagy nyer, vagy pedig elfogy az összes zsetonja. Minden forgatás előtt a piros mezőre rak megduplázva az előző tétet. Mennyi a nyereményének a várható értéke? (Az egyszerűség kedvéért tekintsük a piros és fekete forgatások valószínűségeit $\frac{1}{2}$-nek!)

II. 104 Az $[-1,1] \times [-1,1]$ négyzeten egymás után sorsolunk ki véletlen pontokat. Akkor állunk meg, amikor az első kisorsolt pont beleesik az origó középpontú egységkörbe. Mi a pontok számának eloszlása?

I.105 Tíz berendezést egyszerre kapcsolunk be. Mindegyik berendezés hibamentes működési ideje exponenciális ideig tart, $\lambda = \frac{1}{3}$ paraméterrel, egymástól függetlenül. *Mekkora valószínűséggel fog közülük legalább öt működni 10 időegység múlva?

I.106 Legyen $X \in U(0,1)$ (a 0-1 intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó) és $f(t) = \frac{1}{t+3}, t \in [0,1]$ egy függvény. Mekkora valószínűséggel fog az $Y = f(X)$ valószínűségi változó $\frac{7}{24}$-nél nagyobb értéket felvenni?

I.107 Legyen $X \in N(-2,3), Y = \left(\frac{X+2}{3}\right)^2 + 1$. Adja meg az $f_Y(t)$ sűrűségfüggvényt!

I.108 Tekintsük az $f(t) = A \cdot e^{-t^2}, t \in \mathbb{R}$ valós függvényt. Milyen A paraméter esetén lesz ez sűrűségfüggvény? Ha X-szel jelöljük a sűrűségfüggvényhez tartozó valószínűségi változót, akkor mekkora a $\mathbf{P}(X < 0)$ valószínűség? Mekkora X várhatóértéke és szórása?

I.109 Legyen X 2 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Adja meg az $\mathbf{E}(2+X)^2$ és $\boldsymbol{\sigma}^2(4+3X)$ mennyiségeket, amennyiben léteznek.

I.110 Legyen X 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Adja meg az $\mathbf{E}(3+X)^2$ és $\boldsymbol{\sigma}^2(5+2X)$ mennyiségeket, amennyiben léteznek.
Megoldás: $\mathbf{E}X = \frac{1}{2}, \boldsymbol{\sigma}^2 X = \frac{1}{4}, \mathbf{E}X^2 = \boldsymbol{\sigma}^2 X + (\mathbf{E}X)^2 = \frac{1}{2}$.
$\mathbf{E}(3+X)^2 = 9 + 6\mathbf{E}X + \mathbf{E}X^2 = 12.5, \boldsymbol{\sigma}^2(5+2X) = \boldsymbol{\sigma}^2(2X) = 4\boldsymbol{\sigma}^2(X) = 1$.

I.111 Egyik vizsgán a kiosztott tesztlapon 10 feleletkiválasztós kérdés szerepel. Mindegyik kérdésre csak egy kiválasztott válasz jó a felkínált négy válasz közül, és csak egyet szabad választani. Ha találomra kitöltünk egy ilyen tesztlapot (mindenféle előzetes tudás nélkül), mekkora valószínűséggel érhetünk el legalább négy találatot?
Megoldás: Ha X-szel jelöljük az eltalált kérdések számát, akkor $X \in B\left(10, \frac{1}{4}\right)$. Így a keresett valószínűség:
$$\mathbf{P}(X \geq 4) = \sum_{i=4}^{10} \binom{10}{i} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^i \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-i} = 0.22412$$

I.112 A dobozban kezdetben egy-egy fekete és fehér színű golyó volt. Ekkor ismételten visszatevéssel húzunk a dobozból egy golyót, amíg feketét nem kapunk. Ha egy húzásnál fehéret kapunk, akkor a kihúzott golyót és még plusz két fehér golyót teszünk a dobozba. Jelölje X a fekete golyó húzásáig tartó húzások számát, a fekete golyó húzását is beleszámolva. Adja meg X eloszlását.
Megoldás: $R_X = \{1,2,3,\ldots\}, \mathbf{P}(X=1) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}(X=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, \mathbf{P}(X=n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{1}{2n}$
$\mathbf{P}(X=n) = \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}, n = 1,2,3,\ldots$

I.113 Tekintsük az $f(x) = A \cdot x^4, x \in (0,1), \left(f(x) = 0, \text{ egyébként}\right)$ valós függvényt. Milyen A paraméterérték mellett lesz ez sűrűségfüggvény? Adja meg ebben az esetben a megfelelő eloszlásfüggvényt. Ha X jelöli a sűrűségfüggvényhez tartozó valószínűségi változót, akkor adja meg milyen valószínűséggel vesz fel X $\frac{1}{2}$-nél nagyobb értéket? Mennyi X várható értéke?

I.114 Az egységintervallumot három egyforma részre osztunk az $\frac{1}{3}$ és $\frac{2}{3}$ osztópontok segítségével. Ezután ismételten véletlenszerűen, egymástól függetlenül pontokat választunk az egységintervallumban. Akkor fogunk megállni, ha a kiválasztott pont a középső részbe esett. Jelölje X a kiválasztott pontok számát. Mekkora a $\mathbf{P}(X < 5)$ valószínűség?

I.115 Az emberek testmagassága normális eloszlással jól közelíthető. *Mekkora valószínűséggel történhet az meg, hogy egy tíz tagú társaság többsége magasabb az átlagosnál, azaz testmagasságuk nagyobb az eloszlás első paraméterénél?

I.116 Legyen $X \in Po(3)$ és $Y = 3X - 1$. Adja meg az Y valószínűségi változó eloszlásfüggvényének értékét a π helyen.

I.117 Addig dobunk ismételten egy szabályos kockával, amíg legalább ötöt nem kapunk. Jelölje X a szükséges dobásszámot. Legyen $Y = X^2 + 1$. Adja meg Y eloszlásfüggvényének értékét a $\sqrt{2}$ helyen.

I.118 Legyen X 1 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Adja meg az $\mathbf{E}(2-X)^2$ és $\boldsymbol{\sigma}^2(48+3X)$ mennyiségeket, amennyiben léteznek.

I.119 Egy játékos valamilyen dobókockás társasjátékban már csak 3 mezőnyire van a céltól. Minden körben csak egyszer dobhat a kockával, és a dobásnak megfelelő lépést tehet előre. Jelölje X azon *körök* számát, amely alatt a játékosunk eléri, vagy túlhaladja a cél mezőt. Adja meg X eloszlását, várható értékét és szórását.

I.120 Legyen $X \in B\left(3, \frac{1}{4}\right)$, és $Y = X^2 + 1$. Mi Y eloszlása, és mennyi a várható értéke és szórása?

I.121 Két kockával dobunk. Jelölje X a dobott hatosok számát. Adja meg és rajzolja fel az $Y = |X - 3|$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét! Mennyi Y várható értéke és szórása?

I.122 Legyen $X \in E(1)$ és $Y = [X] + 3$, ahol $[X]$ az X egészrésze. Mennyi az Y diszkrét valószínűségi változó várható értéke és szórása?

I.123 Legyen $X \in E(1)$ és $Y = [X] + 3$, ahol $[X]$ az X egészrésze. Mennyi az Y diszkrét valószínűségi változó várható értéke és szórása?

124. Egy benzinkút hetente kap üzemanyagot. A heti fogyasztást az X jelöli 100 ezer literekben, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{, ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}.$$

Mekkora legyen a tartály K kapacitása, hogy annak valószínűsége, hogy a hét során kifogy a benzin, kisebb legyen $0,05$-nél?

I.125 Legyen $X \in U(0,1)$, és $Y = \sqrt{3X+1}$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását

I.126 Egy 20×20-esnégyzetrácsos padlózatra véletlenül leejtünk 5 db 3 cm-es átmérőjű pénzérmét. A pénzérmék szanaszét gurulva megállnak. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 3 közülük teljesen valamelyik négyzetrács belsejében landol (azaz nincs takarásban semelyik négyzet semelyik oldalával sem)?

I.127 Legyen $X \in Po(2)$ és $Y = X(X+1)(X-3)$. Számolja ki Y várható-értékét!

I.128 Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, $f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi} e^{-\frac{(t+2)^2}{2\pi}}$.

a.) Standardizálja X-et!

b.) $\mathbf{P}(X > -2) = ?$

I.129 András és Béla játszanak. Ismételten egyszerre feldobnak három kockát. Ha páros értékű dobásból van több, akkor András fizet 100 Ft-ot Bélának, ellenkező esetben Béla fizet 100 forintot Andrásnak. Kezdetben mindkettőjüknek 500 Ft-ja volt. A játék akkor fejeződik be, ha valamelyik játékosnak elfogy a pénze. Jelölje X a játék során végrehajtott dobások számát! Adja meg az X eloszlását!

I.130 Válasszunk ki véletlenszerűen két pontot az egységkör kerületén. Jelölje X a két pontot összekötő húr hosszát. Számolja ki X eloszlásfüggvényét.

I.131 Milyen b értéknél lesz az $f(x) = b\sqrt{x-2}$, $x \in (3,4)$ függvény sűrűségfüggvény? Mi az eloszlásfüggvény képlete?