Mérnökinformatikus BSc, Valószínűségszámítás 2. vizsga

1. A felnőtt korú munkaképes lakosság 20%-a beszél legalább egy idegen nyelvet és 80%-a nem beszél idegen nyelven. A nyelvet beszélők 0.025, a nyelvet nem beszélők 0.10 valószínűséggel munkanélküliek egy adott időpillanatban.
a) Kiválasztva egy embert, mennyi az esélye hogy munkanélküli az adott időpillanatban?
b) Ha a kiválasztott ember nem munkanélküli az adott időpillanatban, mennyi a valószínűsége, hogy nem beszél idegen nyelvet?
Megoldás: B_1 : a kiválasztott ember beszél idegen nyelvet, B_2 : a kiválasztott ember nem beszél idegen nyelvet, A : a kiválasztott ember munkanélküli az adott időpillanatban.

$$\mathbf{P}(A \mid B_1) = 0.025, \mathbf{P}(A \mid B_2) = 0.1, \mathbf{P}(B_1) = 0.2, \mathbf{P}(B_2) = 0.8$$

a.) $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \mid B_1)\mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(A \mid B_2)\mathbf{P}(B_2) = 0.025 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8 = 0.085$

b.) $\mathbf{P}(B_2 \mid \bar{A}) = \dfrac{\mathbf{P}(\bar{A} \mid B_2)\mathbf{P}(B_2)}{\mathbf{P}(\bar{A})} = \dfrac{(1-0.1)\cdot 0.8}{1-0.085} = 0.78689$

2. Legyen X λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\left(X \text{ páros}\right) = \frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})$.

Megoldás: $\mathbf{P}(X = 2k) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \cdot e^{-\lambda} \Rightarrow \mathbf{P}\left(X \text{ páros}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \cdot e^{-\lambda} =$

$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2)^k}{(2k)!} = e^{-\lambda} \cdot \operatorname{ch}\lambda = e^{-\lambda} \cdot \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} = \frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})$

3. Egy szabályos pénzérmét addig dobunk fel, míg 10 alkalommal fej nem lesz az eredmény. Legyen X az eddig dobott *írások* száma. Határozzuk meg X eloszlását várható értékét és szórását.
Megoldás: Jelölje Y az összes dobásszámot. Ún negatív binomiális eloszlásról van szó. Addig végezzük a pénzfeldobást, amíg a 10.-re be nem következik az $1/2$ valószínűségű fej dobás.

$$R_Y = \{10, 11, 12, \ldots\}$$

$$Y = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{10}, Z_i \in G\left(\frac{1}{2}\right), \text{ függetlenek;}$$

$$\mathbf{P}(Y = k) = \binom{k-1}{9} \cdot \frac{1}{2^k}$$

$X = Y - 10$
$\mathbf{E}X = \mathbf{E}(Y-10) = 10 \cdot \frac{1}{0.5} - 10 = 10, \boldsymbol{\sigma}^2 X = \boldsymbol{\sigma}^2(Y-10) = \boldsymbol{\sigma}^2 Y = 10 \cdot \frac{0.5}{0.25} = 20 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} X = \sqrt{20}$.

4. Legyenek $X_1, X_2, \ldots X_k$ független, $(0,1)$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg az

$$\mathbf{E}(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}), \mathbf{E}(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_k\})$$

várható értékeket.
Megoldás:

$$\mathbf{P}(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\} \geq t) = \mathbf{P}(X_1 \geq t, X_2 \geq t, \ldots, X_k \geq t) = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_i \geq t) = (1-F(t))^k = (1-t)^k$$

$$F_{\min}(t) = 1-(1-F(t))^k = 1-(1-t)^k, t \in (0,1)$$

$$f_{\min}(t) = k \cdot (1-t)^{k-1}, t \in (0,1)$$

$$F_{\max}(t) = \mathbf{P}(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_k\} < t) = \mathbf{P}(X_1 < t, X_2 < t, \ldots, X_k < t) = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_i < t) = (F(t))^k = t^k$$

$f_{\max}(t) = k \cdot t^{k-1}, t \in (0,1)$

$$\mathbf{E}(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}) = \int_0^1 t \cdot k \cdot (1-t)^{k-1} dt = \frac{1}{k+1}$$

$$\mathbf{E}(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}) = \int_0^1 t \cdot k \cdot t^{k-1} dt = \frac{k}{k+1}$$

5. Ha X_1, X_2, X_3, X_4 páronként korrelálatlan valószínűségi változók 0 várható értékkel és 1

szórással, számoljuk ki
(a) $X_1 + X_2$ és $X_2 + X_3$;
(b) $X_1 + X_2$ és $X_3 + X_4$ korrelációs együtthatóját.
Megoldás:

$$\operatorname{cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = \boldsymbol{\sigma}^2 X_2 = 1$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2(X_1 + X_2) = \boldsymbol{\sigma}^2(X_3 + X_2) = 2\boldsymbol{\sigma}^2 X_1 = 2$$

$$\mathrm{R}(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cov}(X_1 + X_2, X_4 + X_3) = 0 \Rightarrow \mathrm{R}(X_1 + X_2, X_4 + X_3) = 0$$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 0

6^{IMSC}. 50 számot egészre kerekítünk, majd összeadjuk őket. Tegyük fel, hogy a kerekítés minden számnál független, $U(-0.5, 0.5)$ eloszlású. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy kerekítés után összeadva több, mint 3-mal különbözik az eredmény a valódi összegtől.
Megoldás: Az eltérés valószínűsége

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{50} U_i\right| \geq 3\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{50} U_i\right| < 3\right) = 1 - \mathbf{P}\left(-3 < \sum_{i=1}^{50} U_i < 3\right)$$

$$1 - \left(\frac{-3}{50} < \bar{U} < \frac{3}{50}\right) = 1 - \mathbf{P}(-0.06 < \bar{U} < 0.06) =$$

$$1 - \mathbf{P}\left(-0.06 \cdot \sqrt{600} < \sqrt{600} \cdot \bar{U} < 0.06 \cdot \sqrt{600}\right)$$

$$1 - \mathbf{P}\left(-1.4697 < \sqrt{600} \cdot \bar{U} < 1.4697\right) = 1 - (2\Phi(1.4697) - 1) \approx 2 - 2 \cdot 0.9292 = 0.1416$$