

**Valószínűségi változók. Eloszlás fv., diszkrét és folytonos vv.,  
várható érték, szórás**

1. A  $(0, 1)$  intervallumban kijelölünk három pontot véletlenszerűen. Határozzuk meg a középső pont 0-tól való távolságának eloszlásfüggvényét!
2. Eloszlásfüggvény-e az  $F(x) = \exp(-e^{-x})$ ?
3. Mutassuk meg, hogy az  $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{1+2x}{x-0,8}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$  függvény nem lehet eloszlásfüggvény!
4. Legyen az  $X$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye  $F(x)$ .  
Legyenek  $Y = \max\{0, X\}$ ,  $Z = \min\{0, -X\}$ ,  $V = |X|$ , és  $W = -X$ .  
Fejezze ki  $Y, Z, V$  és  $W$  eloszlásfüggvényeit  $F(x)$ -szel!
5. Egy 32 lapos magyar kártyakötegből kihúzzunk egy lapot. Legyen  $X$  a kihúzott lap értéke. Adja meg és ábrázolja  $X$  eloszlásfüggvényét! Számolja ki a  $7,5 < X < 10,2$  esemény valószínűségét!
6. Egy játékos rulettezik. Három tétet tesz meg: egy-egy 100 Ft-os zsetont tesz a fekete 13 számra, a fekete mezőre és a páratlan mezőre. Ötször megismételve ezt a stratégiát, mennyi a játékos nyereségének (veszteségének) várható értéke? (A rulettárcsán 0-tól 36-ig állnak a számok, 18 fekete, 18 piros, a 0-ás zöld színű. A fekete számok között 9 db páros és 9 db páratlan van. Ha valaki számra tesz, a tétet és még annak 36-szorosát seperi be. A fekete vagy páratlan mezőkön a nyereség kétszeres. A 0-ra nem lehet fogadni. Ha 0-ás pörög ki, minden megrakott tétet a bank viszi el.).
7. Egy dobozban 1 piros 2 fehér és 3 piros színű golyó van. Visszatevés nélkül addig húzzunk, amíg mindhárom színből nincs már legalább egy golyónk. Jelölje  $X$  a szükséges húzások számát! Adja meg  $X$  eloszlását és várható értékét!
8. Adjuk meg a 90/5 lottón kihúzott öt szám közül a legkisebb eloszlásfüggvényének az értékét a 25 helyen.
9. Az egységnégyzetben véletlenszerűen kiválasztunk  $n$  pontot. Jelölje  $X$  azon pontok számát, melyek ezek közül belesznek az  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  középpontú  $\frac{1}{2}$  sugarú kör belsejébe is. Adja meg a  $\mathbf{P}(X \leq 5)$  valószínűséget!
10. A  $h$  paraméter milyen értékénél lesz sűrűségfüggvény  
 $f(x) = \frac{4h^2}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2 \cdot h^2}, x > 0$ ?
11. Az egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán taláломra választunk egy-egy pontot véletlenszerűen. Jelöljük  $X$ -szel a két pont távolságát! Adja meg az  $F_X(x)$  eloszlásfüggvényt!

12. Az egységnégyzeten kiválasztunk véletlenszerűen egy pontot. Jelölje  $X$  a pontnak a legközelebbi oldaltól vett távolságát. Adjuk meg az  $X$  valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
13. Egy réten három szarvas legelészik gyanútlanul. Egymásról nem tudva három vadász lopakodik a tisztáshoz, és egyszerre tüzelnek a vadakra. Mindegyik lövés talál, és halálos. Mennyi a lövések után a rétről elszaladó szarvasok számának várható értéke és szórása? (Elvileg több vadász is lőhet ugyanabba a szarvasba...)
14. Egy benzinkút hetente kap üzemanyagot. A heti fogyasztást az  $X$  jelöli 100 ezer literekben, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} 5(1-x)^2 & , \text{ ha } 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & , \text{ egyébként} \end{cases} .$$

Mekkora legyen a tartály  $K$  kapacitása, hogy annak valószínűsége, hogy a hét során kifogy a benzin, kisebb legyen 0,01-nél?

15. Milyen  $c$  értékre lesz a következő függvény sűrűségfüggvény? Határozza meg azon változó várható értékét, amelynek a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} ce^{|x|} & x \in [-1, 2] \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

16. Amerikában a hőmérsékletet Fahrenheit fokokban mérik. Az egyik államban megállapították, hogy az ottani  $X$  hőmérséklet eloszlása nyaranta  $N(86, 4)$ . Hogyan változik meg az eloszlás, ha áttérünk a Celsius-skálára? (A Fahrenheit és Celsius skála között az átváltási képlet:  $\frac{5}{9}(X - 32) [^{\circ}F] = Y [^{\circ}C]$ ).
17. Az autók fogyasztását Amerikában mérföld/gallon-ban (*mpg*) fejezik ki, azaz megadják hány mérföldet tesz meg a gépjármű egy gallon üzemanyaggal. Európában, mint ismeretes a fogyasztást liter/100 km formában adják meg. Egy Fordról tudjuk hogy az  $X$  *mpg* fogyasztását az  $f(x)$  sűrűségfüggvény jellemzi. Hogyan kell transzformálnunk  $f(x)$ -et, ha áttérünk a liter/100 km skálára? (1 mérföld= $a$  km, 1 gallon= $b$  liter, ahol  $a = 1,609$  és  $b = 3,785$ ).
18. Egy automata zacskókba cukorkát adagol. A zacskók  $X$  súlyát  $\mu = 100$  (gramm),  $\sigma = 2$  (gramm) paraméterű normális eloszlásúnak tekinthetjük. Mennyi a valószínűsége annak, hogy három véletlenszerűen kiválasztott zacskó között legalább egy olyan van, aminek a súlya 99 és 101 gramm közé fog esni?
19. Az  $A$  paraméter milyen értékénél lesz az  $f(x) = Ae^{-x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  függvény sűrűségfüggvény? Mennyi ekkor a várhatóérték és a szórásnégyzet?