Tömegkiszolgálás

Dr. Györfi László   Győri Sándor   Dr. Pintér Márta

Tartalomjegyzék

Előszó

A tömegkiszolgálás (vagy sorbanállás) elmélete a matematika időben lejátszódó véletlen jelenségekkel foglalkozó ágának, a sztochasztikus folyamatok vizsgálatának fontos fejezete. Jelentőségét mutatja az a tény, hogy századunk első évtizedeitől kezdve (A.K. Erlang dán mérnök munkája nyomán) a mai napig ezen elmélet alkalmazásai alkotják a telefonközpontok forgalmi méretezésének alapját. A számítógép-hálózatok elterjedésével párhuzamosan az informatikai szakemberek két okból is érdeklődni kezdtek e szakterület iránt. Egyrészt azért, mert a bonyolult számítógépes rendszerek teljesítményének mérésére az egyszerűbbeknél használt determinisztikus modellek nem vezettek eredményre, másrészt azért, mert a több számítógép közötti kommunikáció megszerverzésének során felmerült kérdések a távközlésben már tanulmányozott sorbanállási problémákhoz vezettek. A telekommunikáció és a számítógépes adatátvitel utóbbi időben megfigyelhető összeolvadása csak felerősítette ezt a folyamatot. A korszerű, digitális telefonhálózatok központjai, a vonal- és csomagkapcsolt adathálózatok forgalomvezérlő berendezései mind speciális számítógépek, ezen rendszerek viselkedésének modellezése viszont tömegkiszolgálási feladatok megoldását igényli.

Jegyzetünk a tömegkiszolgálás elméletébe nyújt matematikai igényességű bevezetést (elsősorban) a BME II. évfolyamos informatika szakos hallgatói számára. A tárgyalás során nagy súlyt fektettünk a diszkrét idejű modellek részletes tanulmányozására, mivel ezek (a fent említett okokból kifolyólag) önmagukban is egyre nagyobb jelentőségűek, és alkalmazásukkal a klasszikus folytonos idejű problémák vizsgálata is leegyszerűsödik. A jegyzetnek nem célja a műszaki, informatikai feladatok során felmerülő modellezési kérdések megválaszolása, ilyen jellegű problémákkal a hallgatók a szaktárgyak kereteiben ismerkedhetnek meg.

A jegyzet kéziratához fűzött szakmai és didaktikai megjegyzéseikért köszönetet mondunk Deák Istvánnak, Jereb Lászlónak, Telek Miklósnak és Vetier Andrásnak.

Budapest, 2002. november 11.

Györfi László
Győri Sándor
Pintér Márta

1. fejezet

Diszkrét idejű Markov-láncok

A valószínűségszámítás alkalmazása során sokszor kerülünk szembe időben lejátszódó véletlen eseményekkel, illetve véletlen események sorozatával. Jegyzetünkben ezeket az ún. sztochasztikus folyamatokat a tömegkiszolgálásban felvetődő kérdések szemszögéből vizsgáljuk. A gyakorlati életben gyakran előforduló szituáció az, amikor egy felhasználói igényeket kiszolgáló rendszer egyszerre csak korlátozott számú felhasználóval tud foglalkozni, és a többieknek az ő igényeik kiszolgálásának végéig várakozniuk, sorban állniuk kell. Ilyen úgynevezett tömegkiszolgálási (sorbanállási, forgalmi) rendszerre példa lehet egy áruházi pénztár, egy ügyfélfogadó ablak az önkormányzati irodában, egy útkereszteződés, egy ipari gyártási folyamat részét végrehajtó egység, számítógépes rendszerben a CPU, a memória vagy valamely periféria, egy telefonközpont vagy általánosan bármely kommunikációs hálózat egy olyan kapcsolóeleme, amely az átviendő információcsomagokat rendezi, irányítja vagy feldolgozza.

Tömegkiszolgálási rendszerek egy lehetséges matematikai modellje a következő. A kiszolgáló egységhez véletlen időpontokban érkeznek a felhasználóktól az igények. Ha az igény érkeztekor a rendszerben nem tartózkodik más igény, akkor a kiszolgáló elkezd vele foglalkozni, és valamennyi (véletlen hosszú) idő eltelte alatt elvégzi a vele kapcsolatos feladatokat, majd az igény távozik a rendszerből. Ha az igény nem üresen találja a rendszert, akkor egy várakozási sorba áll be, amelynek befogadóképessége lehet véges vagy ideálisan végtelen nagy. A kiszolgáló egy feladat befejezése után ebből a sorból választja ki valamilyen eljárás szerint azt az igényt, amellyel következőleg foglalkozni fog. Ez az eljárás (a kiszolgálási sorrend meghatározása) lehet olyan, hogy a várakozók közül a rendszer mindig a legkorábban érkezett igényt választja (FCFS vagy FIFO módszer) vagy a legkésőbb érkezett igényt választja (LCFS vagy LIFO módszer), választhat véletlenül vagy az igényekhez rendelt prioritás alapján. Ha külön nem említünk mást, akkor mindig FCFS eljárást feltételezünk.

Ha az igények tetszőleges időpontban érkezhetnek, és azonnal be is állnak a sorba, akkor a rendszerben lévők számát gyakran írhatjuk le folytonos idejű Markov-lánccal (lásd a 3. fejezetet). Először olyan rendszerekkel fogunk foglalkozni, melyeknél az időt szakaszokra (egységekre) bontjuk, az egy időegységben érkező igényeket összegyűjtjük, és azok együtt állnak be a sorba az időszelet végén. A kiszolgáló egy időszakaszban véletlen számú igényt tud kiszolgálni, a kiszolgált igények távoznak a rendszerből. Konkrét rendszerekkel a 2. fejezetben foglalkozunk. Ebben a fejezetben bevezetjük az időben lejátszódó véletlen események leírására szolgáló matematikai modellt, a sztochasztikus folyamatok fogalmát, illetve speciálisan az egyik legegyszerűbb típusú folyamatokat, a Markov-láncokat elemezzük, melyek alkalmasak sok sorbanállási rendszer leírására.

Ilyen rendszerre konkrét példa az evolúciós egyenlettel leírható sorbanállási modell, mellyel a 2.1. szakaszban foglalkozunk.

1.1. Markov-láncok fogalma

Valószínűségi változóknak egy t paraméterrel indexelt $\mathcal{X} = \{X_t : t \in T\}$ családját *sztochasztikus folyamat*nak nevezzük. A t paramétert (főleg az alkalmazásokban gyakori jelentése miatt) rendszerint az idővel azonosítjuk. Ha $T = \{0,1,2,\dots\}$, akkor $\mathcal{X}$-et diszkrét idejű folyamatnak vagy idősornak, ha pedig $T = [0,\infty)$, akkor folytonos idejű folyamatnak hívjuk. X_t-t diszkrét idejű folyamat esetén X_n-nel, folytonos idejű folyamat esetén pedig (a függvényszerű írásmóddal utalva a valós értékű paraméterre) $X(t)$-vel fogjuk jelölni. Azt az S halmazt, amelyből a valószínűségi változók értékeiket veszik, *állapottér*nek (vagy állapothalmaznak) nevezzük. Jegyzetünk további részében főként olyan folyamatokkal foglalkozunk, melyek állapottere diszkrét halmaz, rendszerint $S = \{0,1,2,\dots\}$, ilyenkor S elemeit *állapot*oknak hívjuk. A sztochasztikus folyamat statisztikus jellemzőit megadjuk, ha minden véges n-re és $t_1,t_2,\dots,t_n \in T$-re definiáljuk az $X_{t_1},X_{t_2},\dots,X_{t_n}$ valószínűségi változók együttes eloszlását, tehát $\mathcal{X}$ teljes leírása T, S és a véges dimenziós eloszlások megadását jelenti.

Legyen $\mathcal{X} = \{X_0,X_1,\dots,X_n,\dots\}$ diszkrét idejű, diszkrét állapotterű folyamat. Az általánosság rovása nélkül feltesszük a továbbiakban, hogy az S állapottér elemei a nemnegatív egész számok.

1.1. definíció. *Az $\mathcal{X}$-et* Markov-lánc*nak nevezzük, ha teljesül rá a Markov-tulajdonság, azaz minden $n \geq 1$ és $x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n \in S$ esetén*

$$\mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1},\dots,X_0 = x_0) = \mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}),$$

amennyiben a feltételes valószínűségek léteznek.

A későbbiekben minden feltételes valószínűségre vonatkozó állítást úgy értünk, hogy akkor kívánjuk meg a teljesülését, ha a feltételes valószínűségek léteznek, és ezt külön nem fogjuk hangsúlyozni.

Könnyen belátható, hogy egy Markov-láncra minden $0 \le k \le m < n$ és $x_k, x_{k+1}, \dots, x_m, x_n \in S$ esetén

$$\mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_m = x_m, \dots, X_k = x_k) = \mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_m = x_m). \tag{1.1}$$

A Markov-tulajdonság szemléletesen annyit jelent, hogy a jövő a múlttól csak a jelenen keresztül függ. Ezt megfogalmazhatjuk úgy is, hogy a jövő és a múlt feltételesen függetlenek, feltéve a jelent, formálisan minden $0 \le k < l < n$ és $x_0, \dots, x_n \in S$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n = x_n, \dots, X_{l+1} = x_{l+1}, X_k = x_k, \dots, X_0 = x_0 \mid X_l = x_l, \dots, X_{k+1} = x_{k+1}) = \\ = \mathbf{P}(X_n = x_n, \dots, X_{l+1} = x_{l+1} \mid X_l = x_l, \dots, X_{k+1} = x_{k+1}) \cdot \\ \cdot \mathbf{P}(X_k = x_k, \dots, X_0 = x_0 \mid X_l = x_l, \dots, X_{k+1} = x_{k+1}).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Ha $\mathbf{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_k = x_k) > 0$, akkor

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_k = x_k) = \\ &\quad = \mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_k = x_k) \cdot \\ &\quad \cdot \mathbf{P}(X_{n-1} = x_{n-1} \mid X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_k = x_k) \cdot \ldots \cdot \\ &\quad \cdot \mathbf{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k) \cdot \mathbf{P}(X_k = x_k)\end{aligned}$$

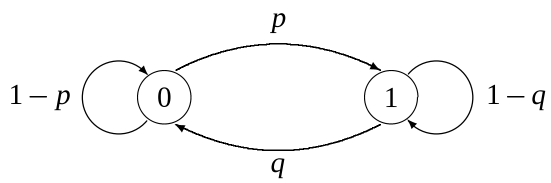
miatt (1.1) alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_k = x_k) = \mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) \cdot \\ \cdot \mathbf{P}(X_{n-1} = x_{n-1} \mid X_{n-2} = x_{n-2}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k) \cdot \\ \cdot \mathbf{P}(X_k = x_k),\end{aligned} \tag{1.3}$$

vagyis egy együttes valószínűség felírható feltételes valószínűségek, úgynevezett *egylépéses állapotátmenet-valószínűség*ek, vagy röviden *átmenetvalószínűség*ek és egy egydimenziós vetületvalószínűség szorzataként.

Az (1.3) képletből az is következik, hogy az $\mathcal{X}$ Markov-láncot egyértelműen definiáljuk, ha megadjuk az X_0 eloszlását, valamint minden $n \ge 1$-re és minden $i, j \in S$-re a $\mathbf{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$ feltételes valószínűségeket, azaz a kezdeti eloszlás és az átmenetvalószínűségek egyértelműen leírják a Markov-láncot mint sztochasztikus folyamatot. Általában $\mathbf{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$ nemcsak i-től és j-től függ, hanem az időtől, n-től is.

1.2. definíció. *Ha* $\mathbf{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$ *nem függ* n*-től, akkor az* $\mathcal{X}$ *Markov-láncot* homogén*nek nevezzük.*



1.1. ábra. Az 1.1. példa átmenetvalószínűség-gráfja

A továbbiakban csak homogén Markov-láncokkal foglalkozunk, ezért Markov-lánc alatt a későbbiekben mindig homogén Markov-láncot értünk.

A

$$p_{ij} = p_{ij}^{(1)} = \mathbf{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

egylépéses átmenetvalószínűségekből képzett

$$\mathbf{\Pi}^{(1)} = \left[p_{ij}^{(1)}\right] = [p_{ij}] = \mathbf{\Pi}$$

mátrix és a $p_i^{(0)} = \mathbf{P}(X_0 = i)$ valószínűségekből képzett

$$P^{(0)} = \left[p_i^{(0)}\right] = \left[p_0^{(0)}\ p_1^{(0)}\ p_2^{(0)} \ldots\right]$$

eloszlás (végtelen sorvektor) tehát egyértelműen megadja a Markov-láncot. A $\mathbf{\Pi}$ átmenetvalószínűség-mátrix mellett egy Markov-láncot leírhatunk az átmenetvalószínűség-gráfjával is. Az átmenetvalószínűség-gráf egy irányított gráf, amelynek pontjai a Markov-lánc állapotai, élei pedig az egy lépésben lehetséges átmenetek, súlyozva az átmenet (nem nulla) valószínűségével.

1.1. példa. *Tekintsük a bináris S állapothalmaz esetét! Legyen*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Ekkor az átmenetvalószínűség-gráf az 1.1. ábrán látható.

Az egylépéses átmenetvalószínűségekhez hasonlóan jelölje

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$$

az n-lépéses átmenetvalószínűségeket, és $\mathbf{\Pi}^{(n)}$ a belőlük képzett mátrixot. Definiálják továbbá a $P^{(n)} = \left[p_i^{(n)}\right]$ eloszlást (végtelen sorvektort) a $p_i^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = i)$ valószínűségek. Teljes indukcióval egyszerűen belátható, hogy

$$\mathbf{\Pi}^{(n)} = \mathbf{\Pi}^n, \tag{1.4}$$

és

$$P^{(n)} = P^{(0)}\mathbf{\Pi}^{(n)} = P^{(0)}\mathbf{\Pi}^{n}, \tag{1.5}$$

ahol $\mathbf{\Pi}^n$ a $\mathbf{\Pi}$ n-edik hatványát jelöli. Hasonlóan kaphatjuk minden $0 \le k \le n$-re, hogy

$$P^{(n)} = P^{(k)}\mathbf{\Pi}^{(n-k)} = P^{(k)}\mathbf{\Pi}^{n-k},$$

ahol definíció szerint $\mathbf{\Pi}^{(0)} = \mathbf{\Pi}^0 = \mathbf{E}$, és $\mathbf{E}$ az egységmátrixot jelöli. (1.4) alapján világos, hogy $0 \le k \le n$-re

$$\mathbf{\Pi}^{(n)} = \mathbf{\Pi}^{(k)}\mathbf{\Pi}^{(n-k)},$$

ezt a képletet Chapman–Kolmogorov-egyenletnek hívjuk. A $\mathbf{\Pi}^{(n)}$ mátrixok definiálásakor nem voltunk teljesen precízek, mert nem vettük figyelembe, hogy míg az S állapottér elemeit 0-tól indexeltük, addig a mátrixok sorait és oszlopait (a szokásoknak megfelelően) 1-től. Tehát a pontosság kedvéért a $\mathbf{\Pi}^{(n)}$ mátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában lévő eleme $p^{(n)}_{i-1,j-1}$ és hasonlóan a $P^{(n)}$ sorvektor i-edik eleme $p^{(n)}_{i-1}$.

1.3. definíció. *Az olyan* $\mathbf{A}$ *(véges vagy végtelen) mátrixot, melynek elemei nemnegatívak és minden sorában az elemek összege* 1*,* sztochasztikus mátrix*nak nevezzük. Nyilvánvalóan* $\mathbf{\Pi}^{(n)}$ *sztochasztikus mátrix.*

Markov-láncra egy eléggé általános illusztráció az emlékezetnélküli valószínűségi változók sorozatával gerjesztett rekurzió:

1.1. tétel. *Legyen* $\{W_n\}$ *független valószínűségi változók sorozata, melyek értékeiket egy* Q *halmazból veszik. Legyen továbbá* $H_n : S \times Q \to S$ *kétváltozós függvények egy sorozata, és* X_n*-et definiálja a következő rekurzió:*

$$\begin{aligned} &X_0 \text{ tetszőleges, } S\text{-beli értékű,}\\ &X_{n+1} = H_{n+1}(X_n, W_{n+1}) \quad (n \ge 0),\end{aligned}$$

ahol X_0 *és* $\{W_n\}$ *is függetlenek. Ekkor* $\mathcal{X} = \{X_n\}$ *egy Markov-lánc. Ha még ráadásul* $H_n(x,w)$ *időinvariáns, azaz* $H_n(x,w) = H(x,w)$ *minden* n*-re, és* $\{W_n\}$ *azonos eloszlású sorozat, akkor* $\mathcal{X}$ *homogén Markov-lánc.*

BIZONYÍTÁS:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) = \\ &= \mathbf{P}(H_n(X_{n-1}, W_n) = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) = \\ &= \mathbf{P}(H_n(x_{n-1}, W_n) = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) = \\ &= \mathbf{P}(H_n(x_{n-1}, W_n) = x_n),\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben azt használtuk ki, hogy $X_{n-1},\dots,X_0$ a $W_{n-1},\dots,W_1$ és X_0 függvénye, amelyek függetlenek W_n-től. Az előző lépéseket fordított sorrendben megismételve kapjuk első állításunkat:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(H_n(x_{n-1},W_n)=x_n) &= \mathbf{P}(H_n(x_{n-1},W_n)=x_n \mid X_{n-1}=x_{n-1}) = \\ &= \mathbf{P}(H_n(X_{n-1},W_n)=x_n \mid X_{n-1}=x_{n-1}) = \\ &= \mathbf{P}(X_n=x_n \mid X_{n-1}=x_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

A tétel második fele az (1.6) kifejezésből következik. ■

A tétel egy bizonyos értelemben vett megfordítása is igaz (lásd az 1.12. feladatot), azaz minden homogén Markov-lánc megadható rekurzióval.

Markov-lánc generálható úgy is, ha felhasználjuk, hogy egy Markov-lánc adott állapotában való tartózkodásának ideje geometriai eloszlású, mégpedig az $i \in S$ állapotban a tartózkodási idő $1-p_{ii}$ paraméterű geometriai eloszlású (lásd az 1.15. feladatot).

1.2. példa. *Ha $H_n(x,w)=h(w)$, vagyis $X_n=h(W_n)$, és $\{W_n\}$ azonos eloszlású sorozat, akkor $\{X_n\}$ független valószínűségi változók sorozata. Ekkor*

$$\mathbf{\Pi}=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{P}(h(W_n)=i)=a_i$ $(i=0,1,2,\dots)$. Ha még az is igaz, hogy $\mathbf{P}(X_0=i)=a_i$, akkor $\{X_n\}$ azonos eloszlású is.

1.3. példa. *Ha $H_n(x,w)=x+w$, $\{W_n\}$ nemnegatív egész értékű és $X_0=0$ egy valószínűséggel, akkor*

$$X_n=W_1+W_2+\dots+W_n,$$

azaz független valószínűségi változók részletösszegeinek a sorozata Markov-lánc. Ha még $\{W_n\}$ azonos eloszlású is, bevezetve a $\mathbf{P}(W_n=i)=a_i$ $(i=0,1,2,\dots)$ jelölést, az átmenetvalószínűség-mátrix a következő alakú:

$$\mathbf{\Pi}=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1.4. példa (Bolyongások).
A. Szimmetrikus bolyongás: *Ha az 1.3. példában* W_n ± 1 *értékű és* $\mathbf{E}(W_n) = 0$*, akkor* $\{X_n\}$*-t szimmetrikus bolyongásnak hívjuk. Ekkor az állapottér az egész számok halmaza, és páratlan n időpontban* X_n *is páratlan, míg páros időpontban* X_n *páros.*
B. Bolyongás elnyelő falak esetén: *Ez egy véges állapotú Markov-lánc a következő átmenetvalószínűség-mátrixszal* $(0 < p < 1, q = 1 - p)$*:*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & q & 0 & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C. Bolyongás visszaverő falak esetén: *Ekkor az átmenetvalószínűség-mátrix* $(0 < p < 1, q = 1 - p)$*:*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & q & 0 & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & q & p \end{pmatrix}.$$

D. Ciklikus bolyongás: *Ha az állapotokat ciklikusan rendezzük, azaz az első és az utolsó állapotot is szomszédosnak tekintjük, akkor az átmenetmátrix az első és az utolsó sorában tér el az előző példabelitől, az első sor* $(0, p, 0, \dots, 0, q)$*, míg az utolsó* $(p, 0, \dots, 0, q, 0)$ *lesz.*

Ha megengedünk átmenetet tetszőleges két állapot között, akkor az átmenetmátrix a következő:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_T \\ p_T & p_0 & p_1 & \cdots & p_{T-1} \\ p_{T-1} & p_T & p_0 & \cdots & p_{T-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_0 \end{pmatrix}$$

ahol $p_0 + p_1 + \cdots + p_T = 1$.

1.5. példa. *Ha* $H_n(x,(v,y)) = (x-v)^+ + y$ *és* $\{V_n\}$ *és* $\{Y_n\}$ *két független, azonos eloszlású sorozat úgy, hogy egymástól is függetlenek, akkor az*

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})^+ + Y_{n+1}$$

evolúciós egyenlethez jutunk, mely több diszkrét idejű kiszolgálási feladat modellezésére alkalmas (lásd a 2.1. és a 2.2. szakaszt) a következőképpen: az időt szakaszokra osztjuk és X_n *jelöli az* n*-edik időegység végén sorbanálló igények számát. Az* n*-edik időintervallumban* Y_n *új igény érkezik és a rendszer ugyanekkor* V_n *igényt képes kiszolgálni.*

Ennek a példának egy speciális esete az, amikor $V_n \equiv 1$*, vagyis egy időegységben a rendszer* 1 *igény kiszolgálására képes. Ha* $\mathbf{P}(Y_n = i) = b_i \quad (i = 0,1,2,\ldots)$*, akkor*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1.2. Irreducíbilis és aperiodikus Markov-láncok

A következőkben Markov-láncok két olyan tulajdonságát vezetjük be, amelyek teljesülése az átmenetmátrix, illetve átmenetgráf segítségével könnyen ellenőrizhető. Jelentőségük abban áll, hogy meglétük elegendő lesz véges állapotú Markov-láncok esetén a stabilitáshoz. A stabilitás igen fontos, számtalan alkalmazási területen kiaknázható és szükséges tulajdonság, amelynek pontos definícióját a következő szakaszban adjuk meg.

1.4. definíció. *Az* $\mathcal{X}$ *Markov-láncot* irreducíbilis*nek nevezzük, ha minden állapota minden állapotából elérhető, ami azt jelenti, hogy minden* $i, j \in S$*-re létezik egy* $n_{ij} > 0$ *úgy, hogy* $p_{ij}^{(n_{ij})} > 0$*.*

Egy Markov-lánc állapotgráfjában csak a pozitív valószínűségű éleket (átmeneteket) berajzolva a lánc akkor irreducíbilis, ha a gráf bármely pontjából bármely másik pontjába vezet irányított út.

1.6. példa. *Az 1.1. példa Markov-lánca, ahol*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

irreducíbilis, ha $p > 0$ *és* $q > 0$*.*

1.5. definíció. *Az $\mathcal{X}$ Markov-lánc egy $i \in S$ állapotát* aperiodikus állapot*nak nevezzük, ha létezik egy $n_i > 0$ úgy, hogy minden $n \geq n_i$-re $p_{ii}^{(n)} > 0$.*

Az irodalomban egy i állapotot akkor neveznek aperiodikusnak, ha az

$$\{n; p_{ii}^{(n)} > 0, n \geq 1\}$$

halmaz elemeinek legnagyobb közös osztója 1. Megmutatható, hogy a két definíció ekvivalens. Azonnal látszik az az irány, hogy az első definícióból következik a második. Általában, ha periodikus az állapot, akkor a fenti halmaz legnagyobb közös osztóját nevezik periódusnak.

1.6. definíció. *Az $\mathcal{X}$ Markov-láncot* aperiodikus*nak nevezzük, ha minden állapota aperiodikus.*

Az 1.1. példa Markov-lánca pontosan akkor aperiodikus, ha $p < 1$ és $q < 1$, vagy $p = 1$ és $0 < q < 1$, vagy $q = 1$ és $0 < p < 1$.

1.2. tétel. *Ha egy $\mathcal{X}$ irreducíbilis Markov-láncnak létezik egy aperiodikus állapota, akkor a lánc aperiodikus.*

BIZONYÍTÁS: A tétel azt állítja, hogy ha egy irreducíbilis láncnak van legalább egy aperiodikus állapota, akkor minden állapota aperiodikus. Legyen $k \in S$ egy aperiodikus állapot. Ekkor megmutatjuk, hogy bármely $j \in S$ is aperiodikus. Mivel a lánc irreducíbilis, ezért létezik r és s egész úgy, hogy $p_{jk}^{(r)} = a > 0$ és $p_{kj}^{(s)} = b > 0$, tehát tetszőleges n egészre

$$p_{jj}^{(n+r+s)} = \sum_{i \in S} \sum_{l \in S} p_{ji}^{(r)} p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(s)} \geq p_{jk}^{(r)} p_{kk}^{(n)} p_{kj}^{(s)} = ab p_{kk}^{(n)}. \tag{1.7}$$

Ha k aperiodikus, akkor létezik egy n_0 úgy, hogy minden $n \geq n_0$-ra $p_{kk}^{(n)} > 0$. (1.7) miatt viszont minden $n \geq n_0$-ra $p_{jj}^{(n+r+s)} > 0$, tehát minden $n \geq n_0 + r + s$-re $p_{jj}^{(n)} > 0$, vagyis j aperiodikus állapot. ■

Egy tulajdonságot nevezzünk *öröklődő*nek, ha amennyiben a lánc egy állapota rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor a többi állapota is. Az 1.2. tétel tehát azt mondja, hogy irreducíbilis Markov-lánc esetén az aperiodikusság öröklődő.

Általában az irreducibilitás és az aperiodikusság könnyen ellenőrizhető tulajdonság. Például, ha az átmenetmátrix két mellékátlójában pozitívak az elemek, akkor minden állapotból minden állapot elérhető, azaz irreducíbilis a Markov-lánc. Ha a főátló elemei pozitívak, akkor pedig aperiodikus a lánc. (Lásd az 1.18. feladatot.)

Az 1.5. példa végén szereplő $\mathbf{\Pi}$ mátrixban, ha $b_0 > 0$ és $b_2 > 0$, akkor az 1.18. feladat alapján a lánc irreducíbilis. Ugyanakkor $b_0 > 0$ miatt a 0 állapot aperiodikus, tehát a lánc is aperiodikus.

1.3. Véges állapotú Markov-láncok stabilitása

A továbbiakban szeretnénk jellemezni a Markov-láncoknak azt a körét, ahol a $P^{(n)}$ eloszlásnak van határértéke (azaz minden $j \in S$-re a $\{p_j^{(n)}\}$ sorozat konvergens), az is egy eloszlás, és az független a kezdeti $P^{(0)}$ eloszlástól.

1.7. definíció. *Ha a*

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = P^{(\infty)}$$

határérték létezik, az egy eloszlás, és az független a kezdeti $P^{(0)}$ eloszlástól, akkor az $\mathcal{X}$ Markov-láncot stabil*nak nevezzük. $P^{(\infty)}$ pedig a Markov-lánc* határeloszlása.

Az irodalomban a fentieknek eleget tevő Markov-láncot gyakran ergodikusnak nevezik. Mi az ergodicitás fogalmat más értelemben fogjuk később használni.

Jelölje p_j $(j = 0,1,2,\dots)$ a $P^{(\infty)}$ $(j+1)$-edik elemét, azaz legyen

$$p_j = \lim_{n\to\infty} p_j^{(n)}.$$

Egy véges állapotú Markov-lánc stabil, ha a

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \tilde{p}_j$$

határérték létezik és nem függ i-től, hiszen

$$\lim_{n\to\infty} p_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} p_i^{(0)} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S} p_i^{(0)} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S} p_i^{(0)} \tilde{p}_j = \tilde{p}_j \sum_{i\in S} p_i^{(0)} = \tilde{p}_j.$$

Stabil Markov-lánc határeloszlását megkaphatjuk a

$$P = P\mathbf{\Pi} \tag{1.8}$$

egyenletet megoldva, mivel

$$P^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P^{(0)}\mathbf{\Pi}^n = \left(\lim_{n\to\infty} P^{(0)}\mathbf{\Pi}^{n-1}\right)\mathbf{\Pi} = \left(\lim_{n\to\infty} P^{(n-1)}\right)\mathbf{\Pi} = P^{(\infty)}\mathbf{\Pi}. \tag{1.9}$$

Másrészt stabil Markov-lánc esetén a megoldás egyértelmű, mert ha P egy megoldás, és $P^{(0)} = P$, akkor $P^{(1)} = P^{(0)}\mathbf{\Pi} = P^{(0)}$, és indukcióval belátható, hogy minden n-re $P^{(n)} = P^{(0)}$, azaz a lánc egy azonos eloszlású sorozat, és P a határeloszlás.

1.7. példa. *Az 1.1. példa Markov-lánca esetén teljes indukcióval belátható, hogy*

$$p_0^{(n)} = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left(p_0^{(0)} - \frac{q}{p+q} \right) \tag{1.10}$$

és

$$p_1^{(n)} = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left(p_1^{(0)} - \frac{p}{p+q} \right), \tag{1.11}$$

ahonnan következik, hogy a stabilitás szükséges és elégséges feltétele

$$|1-p-q| < 1.$$

A határeloszlás pedig a $P^{(\infty)} = \left(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q} \right)$ *eloszlás.*

Az előző szakaszban mondottak alapján az 1.1. példa Markov-lánca pontosan akkor irreducíbilis és aperiodikus, ha $p > 0$, $q > 0$ és $p+q < 2$, ugyanekkor azonban $|1-p-q| < 1$ is teljesül, ami példánkban ekvivalens volt a stabilitással. Megmutatjuk, hogy ez nem véletlen.

1.3. tétel. *Egy véges állapotú, irreducíbilis és aperiodikus Markov-lánc stabil.*

A tétel bizonyítását 2 lemmára bontjuk fel.

1.1. lemma. *Egy véges állapotú, irreducíbilis és aperiodikus* $\mathfrak{X}$ *Markov-lánc esetén létezik* n_0 *úgy, hogy minden* $n > n_0$ *és* $i, j \in S$ *esetén*

$$p_{ij}^{(n)} > 0.$$

BIZONYÍTÁS: Az irreducibilitás miatt minden i, j-hez létezik n_{ij} úgy, hogy

$$p_{ij}^{(n_{ij})} > 0,$$

másrészt az aperiodikusság miatt minden j-hez létezik n_j úgy, hogy minden $n > n_j$-re

$$p_{jj}^{(n)} > 0,$$

tehát minden $n > n_{ij} + n_j$ esetén

$$p_{ij}^{(n)} \geq p_{ij}^{(n_{ij})} p_{jj}^{(n-n_{ij})} > 0.$$

Legyen

$$n_0 = \max_{i,j \in S} \{n_{ij} + n_j\},$$

ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

1.2. lemma (Markov tétele). *Ha egy véges állapotú $\mathcal{X}$ Markov-lánc esetén létezik N úgy, hogy minden $i, j \in S$ esetén*

$$p_{ij}^{(N)} > 0,$$

akkor $\mathcal{X}$ stabil.

BIZONYÍTÁS: Az 1.23. feladat állítása miatt azt kell megmutatni, hogy bármely $j \in S$-re a $\mathbf{\Pi}^{(n)}$ mátrix j-hez tartozó oszlopa maximumának és minimumának ugyanaz a határértéke. Tehát bevezetve az

$$m_j^{(n)} = \min_{i \in S} p_{ij}^{(n)}$$

és az

$$M_j^{(n)} = \max_{i \in S} p_{ij}^{(n)}$$

jelöléseket, azt kell belátnunk, hogy

$$\lim_{n \to \infty} M_j^{(n)} = \lim_{n \to \infty} m_j^{(n)}.$$

Mivel

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj}^{(n)},$$

ezért

$$\begin{aligned} m_j^{(n+1)} &= \min_{i \in S} p_{ij}^{(n+1)} = \min_{i \in S} \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \geq \\ &\geq \min_{i \in S} \sum_{k \in S} p_{ik} \min_{l \in S} p_{lj}^{(n)} = \min_{i \in S} \sum_{k \in S} p_{ik} m_j^{(n)} = m_j^{(n)}, \end{aligned}$$

tehát

$$m_j^{(n+1)} \geq m_j^{(n)},$$

és hasonló módon

$$M_j^{(n+1)} \leq M_j^{(n)}.$$

$\{M_j^{(n)}\}$ monoton fogyásából és $\{m_j^{(n)}\}$ monoton növekedéséből következik, hogy ha $\{M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\}$ 0-hoz tart, akkor $\{M_j^{(n)}\}$-nek és $\{m_j^{(n)}\}$-nek ugyanaz a határértéke, és ezt akarjuk megmutatni. $\{M_j^{(n)}\}$ monoton fogyásából és $\{m_j^{(n)}\}$ monoton növekedéséből az is következik, hogy $\{M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\}$ monoton fogyó, ezért 0-hoz tartását elég egy részsorozatán megmutatni. Állításunkat tehát bebizonyítjuk, ha belátjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(M_j^{(nN)} - m_j^{(nN)}\right) = 0. \tag{1.12}$$

Legyen

$$\varepsilon = \min_{i,j\in S} p_{ij}^{(N)}.$$

Ekkor a feltételünk miatt $\varepsilon > 0$, és

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(N+n)} &= \sum_{k\in S} p_{ik}^{(N)} p_{kj}^{(n)} = \sum_{k\in S}\left(p_{ik}^{(N)} - \varepsilon p_{jk}^{(n)}\right) p_{kj}^{(n)} + \varepsilon \sum_{k\in S} p_{jk}^{(n)} p_{kj}^{(n)} = \\ &= \sum_{k\in S}\left(p_{ik}^{(N)} - \varepsilon p_{jk}^{(n)}\right) p_{kj}^{(n)} + \varepsilon p_{jj}^{(2n)}. \end{aligned}$$

mivel ε definíciója miatt $p_{ik}^{(N)} \geq \varepsilon$ és $p_{jk}^{(n)} \leq 1$, így $p_{ik}^{(N)} - \varepsilon p_{jk}^{(n)} \geq 0$, és ezért

$$p_{ij}^{(N+n)} \geq m_j^{(n)} \sum_{k\in S}\left(p_{ik}^{(N)} - \varepsilon p_{jk}^{(n)}\right) + \varepsilon p_{jj}^{(2n)} = m_j^{(n)}(1-\varepsilon) + \varepsilon p_{jj}^{(2n)}$$

tehát

$$m_j^{(N+n)} = \min_{i\in S} p_{ij}^{(N+n)} \geq m_j^{(n)}(1-\varepsilon) + \varepsilon p_{jj}^{(2n)},$$

és hasonló módon

$$M_j^{(N+n)} \leq M_j^{(n)}(1-\varepsilon) + \varepsilon p_{jj}^{(2n)},$$

következésképpen

$$M_j^{(N+n)} - m_j^{(N+n)} \leq \left(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\right)(1-\varepsilon).$$

Legyen $n = kN$. Ekkor

$$M_j^{((k+1)N)} - m_j^{((k+1)N)} \leq \left(M_j^{(kN)} - m_j^{(kN)}\right)(1-\varepsilon),$$

vagyis ezt ismételve

$$M_j^{((k+1)N)} - m_j^{((k+1)N)} \leq \left(M_j^{(N)} - m_j^{(N)}\right)(1-\varepsilon)^k,$$

és itt a jobb oldali kifejezés $k \to \infty$ esetén 0-hoz tart, így a bal oldal is, amivel az (1.12) egyenlőséget beláttuk. ■

A bizonyításból az is következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} p_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} m_j^{(n)} > 0,$$

hiszen a feltétel miatt $m_j^{(N)} > 0$ és $\{m_j^{(n)}\}$ monoton növekedő. Ezzel beláttuk, hogy véges állapotú, irreducíbilis és aperiodikus Markov-lánc esetén a határeloszlás minden tagja pozitív.

Fontos megjegyezni, hogy az irreducibilitás és aperiodikusság véges állapotú Markov-lánc esetén elégséges, de nem szükséges feltételei a stabilitásnak. Az 1.7. példában a stabilitás $|1-p-q| < 1$ feltétele teljesül, ha $p = 0$ és $q > 0$, bár a Markov-lánc nem irreducíbilis. Ekkor a határeloszlásnak lesz nulla tagja, példánkban $P^{(\infty)} = (1,0)$.

1.8. definíció. *Egy diszkrét idejű $\mathcal{X}$ sztochasztikus folyamatot (erősen)* stacionárius*nak nevezünk, ha bármely pozitív egész n-re, m-re és $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_m$-re az $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})$ és $(X_{t_1+n}, \ldots, X_{t_m+n})$ valószínűségi változók együttes eloszlása megegyezik, azaz a véges dimenziós eloszlások időeltolásra invariánsak.*

Nyilván ha $\mathcal{X}$ erősen stacionárius, akkor azonos eloszlású. A megfordítás általában nem igaz, de Markov-láncokra igen (lásd az 1.22. feladatot).

Stacionárius Markov-lánc esetén

$$P^{(0)} = P^{(1)} = P^{(0)}\mathbf{\Pi},$$

tehát ez az azonos eloszlás is kielégíti az (1.8) egyenletet. A Markov-láncok azon osztályában, ahol $P^{(\infty)}$ határeloszlást tudunk garantálni, ott az (1.8) egyenletnek egyetlen egy megoldása van (amely eloszlás), tehát stabil Markov-lánc határeloszlása a stacionárius eset eloszlása, ezért $P^{(\infty)}$-t gyakran stacionárius (vagy egyensúlyi) eloszlásnak hívjuk.

1.4. Oldalak rangsorolása webes keresőrendszerekben

Gyakran előfordul, hogy a felhasználó által feltett kérdésre egy keresőrendszer rengeteg oldalt talált, melyek közül természetesen némelyek fontosabbak, mások kevésbé fontosak. Rangsorolni kell tehát az oldalakat automatikusan aszerint, hogy mekkora közük van a feltett kérdéshez. Itt a Google keresőrendszer Pagerank algoritmusát mutatjuk be.

A feladat a rendelkezésre álló T darab weboldal közti fontossági sorrendet felállítani. A legtöbb keresőrendszer abból indul ki, hogy ha egy oldal készítője linket helyez el az oldalán, akkor valamiért fontosnak tartja a mutatott oldalt. Tehát a linkstruktúrából kiindulva adható a fontosságnak egy heurisztikus definíciója, nevezetesen, hogy egy oldal akkor fontos, ha sok link mutat rá. Illetve egy rekurzív definícióval élve: egy oldal fontos, ha fontos oldalak mutatnak rá.

A weboldalak között mutató linkek teszik lehetővé, hogy egyik oldalról egy lépésben átmenjünk egy másik oldalra, tehát ha az oldalakat állapotoknak tekintjük, akkor az Interneten való barangolást homogén Markov-láncként foghatjuk fel. Az egylépéses állapotátmenet-valószínűség legyen

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{m_i}, & \text{ha } i\text{-ről mutat link } j\text{-re,} \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol m_i az i-edik oldalon található linkek száma.

Egy oldal fontosságát mutatja az, hogy a Markov-lánc mekkora valószínűséggel tartózkodik az oldalnak megfelelő állapotában. Vagyis a lánc határeloszlását kellene meghatározni. A linkstruktúra által adott Markov-lánc azonban nem biztos, hogy irreducíbilis és aperiodikus, így egyrészt nem biztos, hogy stabil, másrészt lehetnek benne zárt halmazok, ahonnan nem vezet kifelé link, és így a határeloszlásban a halmazon kívüli oldalak valószínűsége nulla lesz, vagyis a halmazon belüli oldalak magukba gyűjtik esetleg az összes fontosságot.

Az első problémát megoldja, hogyha a láncot az egyenletes eloszlásból indítjuk, azaz $P^{(0)} = (\frac{1}{T}, \dots, \frac{1}{T})$, ugyanis megmutatható, hogy ebben az esetben mindig létezik határértéke a $P^{(n)}$ eloszlásnak. A határérték megkapható a $P = P\mathbf{\Pi}$ egyenlet megoldásával. De célunk nem a valószínűségek pontos kiszámolása, hanem az oldalak rangsorolása. Ezért elég a $P^{(n)}$ eloszlásokat a $P^{(n)} = P^{(n-1)}\mathbf{\Pi}$ iterációval addig számolni, amíg egy iteráció után az eloszlás alapján felállított sorrend nem változik.

Az algoritmus előnye, hogy gyors, könnyen programozható és hűen tükrözi a „sztochasztikus szörfölő” lelkivilágát, aki egyenletes eloszlás szerint választ egy kiindulási oldalt, majd az aktuális elérhető oldalak közül választ minden lépésben egyenletes eloszlással. Viszont nem oldottuk még meg a zárt halmazok okozta problémát.

A Pagerank algoritmus finomabb változata a fenti $\mathbf{\Pi}$ állapotátmenet-mátrix helyett a $\mathbf{\Pi}' = \varepsilon\mathbf{U} + (1-\varepsilon)\mathbf{\Pi}$ mátrixot használja valamely $0 < \varepsilon < 1$-ra, ahol

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T} & \frac{1}{T} & \cdots & \frac{1}{T} \\ \frac{1}{T} & \frac{1}{T} & \cdots & \frac{1}{T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{T} & \frac{1}{T} & \cdots & \frac{1}{T} \end{pmatrix}.$$

Intuitíven ez az jelenti, hogy minden oldaltól beszedjük fontosságának egy részét, és ezt a beszedett fontosságot egyenletesen szétosztjuk az oldalak között. A $\mathbf{\Pi}'$ állapotátmenet-mátrix a „szeszélyes sztochasztikus szörfölő” barangolási módszerét mutatja, aki ε valószínűséggel nem az aktuális oldalról lép tovább, hanem szeszélyesen, véletlenszerűen választ az összes oldal közül. Ebben az új modellben a Markov-lánc irreducíbilis és aperiodikus lesz, hiszen az átmenetmátrix főátlójában és mellékátlóiban csupa pozitív elem áll (lásd az 1.18. feladatot). Így az 1.3. tétel alapján a Markov-lánc stabil lesz, és a tétel bizonyítását követő megjegyzés szerint a határeloszlás minden tagja pozitív, tehát egyik oldal fontossága sem nullázódik le.

1.5. Visszatérőség

Sajnos végtelen állapothalmaz esetén az irreducibilitás és az aperiodikusság nem elég a stabilitáshoz. Ezt illusztrálja a következő példa:

1.8. példa. *Tekintsük a következő, az 1.1. tételben bevezetett jelölésekkel definiált folyamatot: S legyen a nemnegatív egész számok halmaza, $\{W_n\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyek eloszlása:*

$$\mathbf{P}(W_n = -1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(W_n = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(W_n = 1) = \frac{1}{2},$$

továbbá $X_0 \equiv 0$ és $H(x,w) = (x+w)^+$, azaz

$$X_{n+1} = (X_n + W_{n+1})^+ \quad (n = 0,1,2,\dots).$$

Szavakban a folyamat működése így írható le: X_n-ből $\frac{1}{2}$ valószínűséggel felfelé lépünk egyet, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel ugyanott maradunk és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel lefelé lépünk, ha tudunk. Az 1.1. tétel értelmében $\{X_n\}$ homogén Markov-lánc, melynek átmenetmátrixa

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Mivel $\mathbf{\Pi}$ főátlójában és két szomszédos mellékátlójában minden elem pozitív, azért az 1.18. feladatban mondottakra tekintettel a lánc irreducíbilis és aperiodikus. Meg fogjuk mutatni, hogy minden $i \in S$-re $\lim\limits_{n\to\infty} p_i^{(n)} = 0$, ami ekvivalens azzal (lásd az 1.31. feladatot), hogy minden $i \in S$-re $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{i} p_j^{(n)} = 0$. Vegyük észre, hogy $\sum_{j=0}^{i} p_j^{(n)} = \mathbf{P}(X_n \le i)$, így az utóbbi valószínűség becslésével kell foglalkoznunk. Ha bevezetjük a $Z_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$ jelölést, akkor egyszerűen látható, *hogy $Z_n \le X_n$, így az $\{X_n \le i\}$ esemény maga után vonja a $\{Z_n \le i\}$ eseményt, azaz*

$$\mathbf{P}(X_n \le i) \le \mathbf{P}(Z_n \le i).$$

Mivel $\mathbf{E}(Z_n) = n\mathbf{E}(W_1) = n\frac{1}{4}$, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z_n \le i) &= \mathbf{P}\big(Z_n - \tfrac{n}{4} \le i - \tfrac{n}{4}\big) = \\ &= \mathbf{P}\big(Z_n - \mathbf{E}(Z_n) \le i - \tfrac{n}{4}\big) = \\ &= \mathbf{P}\big(\tfrac{1}{n}Z_n - \mathbf{E}\big(\tfrac{1}{n}Z_n\big) \le \tfrac{i}{n} - \tfrac{1}{4}\big).\end{aligned}$$

Ha $n > 4i$, akkor $\frac{i}{n} - \frac{1}{4} < 0$, tehát az $\left\{\frac{1}{n}Z_n - \mathbf{E}\big(\frac{1}{n}Z_n\big) \le \frac{i}{n} - \frac{1}{4}\right\}$ esemény maga után vonja az $\left\{\left|\frac{1}{n}Z_n - \mathbf{E}\big(\frac{1}{n}Z_n\big)\right| \ge \left|\frac{i}{n} - \frac{1}{4}\right|\right\}$ eseményt, és így

$$\mathbf{P}(Z_n \le i) \le \mathbf{P}\Big(\big|\tfrac{1}{n}Z_n - \mathbf{E}\big(\tfrac{1}{n}Z_n\big)\big| \ge \big|\tfrac{i}{n} - \tfrac{1}{4}\big|\Big) \le \frac{\sigma^2\left(\frac{1}{n}Z_n\right)}{\left(\frac{i}{n} - \frac{1}{4}\right)^2},$$

ahol az utolsó lépésnél a Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmaztuk. Ugyanakkor a $\{W_n\}$ sorozat független és azonos eloszlású, tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathbf{P}(X_n \le i) \le \mathbf{P}(Z_n \le i) \le \frac{\frac{1}{n^2}n\sigma^2(W_1)}{\left(\frac{i}{n} - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\frac{11}{16}}{n\left(\frac{i}{n} - \frac{1}{4}\right)^2}. \tag{1.13}$$

(1.13) igaz minden $n > 4i$-re és jobb oldala $n \to \infty$ esetén 0-hoz tart, így a bal is, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \le i) = 0$, amiből következik, hogy a lánc nem stabil.

Ahhoz, hogy végtelen állapotú Markov-láncok stabilitására jól kezelhető kritériumot kapjunk, újabb fogalmakat kell tehát bevezetnünk. Legyen $f_{ij}^{(n)}$ annak a valószínűsége, hogy az i állapotból indítva a lánc pontosan az n-edik lépésben jut el először a j állapotba, azaz

$$f_{ij}^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = j, X_k \ne j, 1 \le k < n \mid X_0 = i), \quad (n \ge 1,\ i, j \in S)$$

és definíció szerint legyen $f_{ij}^{(0)} = 0$ $(i, j \in S)$. Nyilvánvaló, hogy minden $i, j \in S$-re és minden n-re $f_{ij}^{(n)} \le p_{ij}^{(n)}$.

1.9. példa. *Az 1.1. példában az $f_{01}^{(n)}$ valószínűségek a következőképpen alakulnak: $f_{01}^{(1)} = p$, $f_{01}^{(2)} = (1-p)p$, $f_{01}^{(3)} = (1-p)^2 p, \ldots,$ $f_{01}^{(n)} = (1-p)^{n-1}p$.*

Vezessük be továbbá a $p_{ij}^{(0)}$ jelölést a 0-lépéses átmenetvalószínűségre, ennek értéke értelemszerűen 1, ha $i = j$ és 0, ha $i \ne j$.

1.3. lemma. *Az előbb bevezetett jelölésekkel minden $i, j \in S$-re és $n \geq 1$-re*

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

BIZONYÍTÁS: Írjuk fel $p_{ij}^{(n)}$-et a teljes valószínűség tételével az alábbi teljes eseményrendszer felhasználásával:

$$A_k = \{X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j, X_k = j\} \quad (k = 1, \ldots, n-1),$$

$$A_n = \{X_l \neq j \ \ (l = 1, \ldots, n-1)\}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= \mathbf{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_n = j, A_k \mid X_0 = i) = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_n = j \mid A_k, X_0 = i)\mathbf{P}(A_k \mid X_0 = i) + \mathbf{P}(X_n = j, A_n \mid X_0 = i) = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_n = j \mid X_k = j)\mathbf{P}(X_k = j, X_l \neq j \ \ (l = 1, \ldots, k-1) \mid X_0 = i) + \\
&\quad + \mathbf{P}(X_n = j, X_l \neq j \ \ (l = 1, \ldots, n-1) \mid X_0 = i) = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)} + f_{ij}^{(n)} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)},
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a Markov-tulajdonságot. ■

A bizonyításban definiált A_k események páronkénti kizáróságát felhasználva egyszerűen belátható, hogy annak a valószínűsége, hogy a lánc az i állapotból indítva valamikor eljut a j állapotba, éppen az $f_{ij}^{(n)}$-ek összege, azaz

$$\mathbf{P}(X_n = j \ \text{ valamely } n \geq 1\text{-re } \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}. \tag{1.14}$$

Ha a láncot i-ből indítjuk és egy valószínűséggel előfordul később is az i állapot, akkor azt mondhatjuk, hogy a lánc biztosan visszatér i-be és ez indokolja a következő definíciót:

1.9. definíció. *Az $i \in S$ állapotot* visszatérő*nek nevezzük, ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1,$$

és nem visszatérő*nek, ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1.$$

1.10. definíció. *Egy $\mathcal{X}$ Markov-láncot* visszatérő*nek nevezünk, ha minden állapota visszatérő, és* nem visszatérő*nek, ha minden állapota nem visszatérő.*

1.4. tétel. *Az $i \in S$ állapot akkor és csak akkor visszatérő, ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty. \tag{1.15}$$

Az $i \in S$ állapot pontosan akkor nem visszatérő, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty. \tag{1.16}$$

BIZONYÍTÁS: A tételt belátjuk, ha megmutatjuk, hogy egy i visszatérő állapotra (1.15), nem visszatérő állapotra pedig (1.16) áll fenn. Vezessük be az

$$a_N = \sum_{n=0}^{N} p_{ii}^{(n)} \quad (N \geq 0)$$

jelölést, ezt használva az 1.3. lemma alapján

$$\begin{aligned}
a_N &= p_{ii}^{(0)} + \sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)} = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} I_{\{k \leq n\}} = \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N} \left(f_{ii}^{(k)} \sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n-k)} I_{\{k \leq n\}} \right) = \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N} \left(f_{ii}^{(k)} \sum_{n=k}^{N} p_{ii}^{(n-k)} \right) = \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N} \left(f_{ii}^{(k)} \sum_{n=0}^{N-k} p_{ii}^{(n)} \right),
\end{aligned}$$

azaz

$$a_N = 1 + \sum_{k=1}^{N} f_{ii}^{(k)} a_{N-k}. \tag{1.17}$$

Az $\{a_N\}$ sorozat monoton növekedő és konvergál $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$-hez, amelyet ezután a-val jelölünk, és amely lehet $+\infty$ is.

Tekintsük először a visszatérő esetet és indirekt módon tegyük fel, hogy a véges. (1.17) alapján minden $N \geq M \geq 1$-re

$$a_N \geq 1 + \sum_{k=1}^{M} f_{ii}^{(k)} a_{N-k},$$

amiből mindkét oldal N szerinti határértékét véve minden $M \geq 1$-re

$$a \geq 1 + a \sum_{k=1}^{M} f_{ii}^{(k)}.$$

Ennek $M \to \infty$ szerinti határértékére a visszatérőség miatt

$$a \geq 1 + a,$$

ami ellentmond a végességének, tehát indirekt feltételünk nem lehet igaz, vagyis $a = \infty$.

Most tegyük fel, hogy i nem visszatérő. $\{a_N\}$ monoton növekedéséből és az (1.17) egyenletből következik, hogy

$$a_N \leq 1 + a_N \sum_{k=1}^{N} f_{ii}^{(k)},$$

tehát átrendezve és határértéket véve

$$a \leq \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)}} < \infty.$$

■

1.5. tétel. *$\mathcal{X}$ irreducíbilis Markov-lánc esetén a visszatérő és a nem visszatérő tulajdonságok öröklődők.*

BIZONYÍTÁS: Használjuk az 1.2. tétel bizonyításának a jelöléseit. Ekkor (1.7) miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n+r+s)} \geq ab \sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}^{(n)}.$$

Ebből az előző tétel alkalmazásával következik, hogy ha k visszatérő, akkor j is az, és ha j nem visszatérő, akkor k sem az. ■

1.6. tétel. *Ha az $\mathcal{X}$ Markov-lánc irreducíbilis és nem visszatérő, akkor minden $i, j \in S$-re*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

BIZONYÍTÁS: Az irreducibilitás miatt létezik $r \geq 1$ úgy, hogy $p_{ji}^{(r)} = a > 0$, tehát minden $n > r$-re

$$p_{jj}^{(n)} \geq p_{ji}^{(r)} p_{ij}^{(n-r)} = a p_{ij}^{(n-r)}.$$

Ebből mindkét oldalt összegezve

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \geq a \sum_{n=r+1}^{\infty} p_{ij}^{(n-r)}.$$

A bal oldal j nem visszatérősége miatt (1.16) alapján véges, tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty.$$

De ha ez a sor konvergens, akkor $p_{ij}^{(n)}$ 0-hoz tart, és ezt akartuk megmutatni. ■

Visszatérő Markov-láncra nemcsak az igaz, hogy egy valószínűséggel visszatér a kiindulási állapotába, hanem az is, hogy egy valószínűséggel eljut bármelyik állapotába. Emlékezzünk vissza, hogy annak a valószínűsége, hogy a Markov-lánc az i állapotból indulva eljut a j állapotába (1.14) szerint az $f_{ij}^{(n)}$ valószínűségek összege.

1.4. lemma. *Ha az $\mathcal{X}$ Markov-lánc irreducíbilis és visszatérő, akkor minden $i, j \in S$-re*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1.$$

BIZONYÍTÁS: Legyen

$$f_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)},$$

akkor a visszatérőség definíciója miatt minden $j \in S$-re

$$f_{jj}^{*} = 1. \tag{1.18}$$

Láttuk, hogy f_{ij}^{*} éppen annak a valószínűsége, hogy i-ből indítva a láncot valamikor eljut j-be, és így

$$f_{ij}^{*} \leq 1. \tag{1.19}$$

Írjuk fel f_{ij}^*-ot részletesebben!

$$\begin{aligned}
f_{ij}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{k\in S\\ k\neq j}} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} = \\
&= p_{ij} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k\in S} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} - p_{ij} f_{jj}^{(n-1)} \right) = \\
&= p_{ij} - \sum_{n=2}^{\infty} p_{ij} f_{jj}^{(n-1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k\in S} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} = \\
&= p_{ij} - p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} + \sum_{k\in S} p_{ik} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{kj}^{(n)} \right) = \\
&= p_{ij}(1 - f_{jj}^*) + \sum_{k\in S} p_{ik} f_{kj}^* = \sum_{k\in S} p_{ik} f_{kj}^*,
\end{aligned} \tag{1.20}$$

ahol az utolsó lépésnél felhasználtuk az (1.18) egyenlőséget. Az irreducibilitás miatt létezik $N \geq 1$ úgy, hogy $p_{ji}^{(N)} > 0$, ekkor az (1.20) képletet ismételten alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f_{jj}^* = \sum_{k\in S} p_{jk} f_{kj}^* = \sum_{k\in S} p_{jk} \left(\sum_{l\in S} p_{kl} f_{lj}^* \right) = \sum_{l\in S} p_{jl}^{(2)} f_{lj}^* = \ldots = \sum_{t\in S} p_{jt}^{(N)} f_{tj}^*,$$

ahonnan (1.18) és (1.19) felhasználásával

$$1 = f_{jj}^* = \sum_{t\in S} p_{jt}^{(N)} f_{tj}^* \leq p_{ji}^{(N)} f_{ij}^* + \sum_{\substack{t\in S\\ t\neq i}} p_{jt}^{(N)} = p_{ji}^{(N)} f_{ij}^* + 1 - p_{ji}^{(N)} = 1 + p_{ji}^{(N)} (f_{ij}^* - 1).$$

Ha itt $f_{ij}^* < 1$ lenne, akkor $p_{ji}^{(N)} > 0$ miatt ellentmondást kapnánk. ■

Bizonyítás nélkül közöljük, hogy ha i visszatérő állapot, akkor i-ből indítva a láncot nemcsak az igaz, hogy egy valószínűséggel visszatér i-be, hanem egy valószínűséggel végtelen sokszor is visszatér. Ha pedig j nem visszatérő, akkor j-ből a lánc egy valószínűséggel csak véges sokszor tér vissza j-be.

Belátható, hogy véges állapotú Markov-láncnak mindig van legalább egy visszatérő állapota, tehát ha irreducíbilis is, akkor visszatérő is.

1.6. Végtelen állapotú Markov-láncok stabilitása

A véges állapotú Markov-láncokhoz hasonlóan végtelen állapothalmaz esetén is vizsgálható a stabilitás az átmenetvalószínűségek alapján. Ebben az esetben is teljesül a következő tétel, amelyet véges esetben be is bizonyítottunk.

1.7. tétel. *Az $\mathcal{X}$ Markov-lánc akkor és csak akkor stabil, ha minden $i, j \in S$-re a*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \tilde{p}_j$$

határérték létezik, független i-től minden $j \in S$-re és $\{\tilde{p}_j\}$ eloszlást ad meg. Stabil láncra $\tilde{p}_j = p_j$.

Az 1.7. tétel szemléletesen azt jelenti, hogy stabil Markov-lánc esetén a $\mathbf{\Pi}^{(n)}$ (azaz (1.4) alapján a $\mathbf{\Pi}^n$) mátrix konvergál egy olyan mátrixhoz, amelynek minden sora megegyezik a $P^{(\infty)}$ vektorral.

Az 1.7. tétel és (1.4) miatt a stabilitás levezethető egyedül a $\mathbf{\Pi}$ mátrixból. Bizonyítás nélkül közöljük, hogy a $P^{(\infty)}$ határeloszlás végtelen esetben is megoldja a

$$P = P\mathbf{\Pi} \tag{1.21}$$

egyenletet.

1.8. tétel. *Ha a $P^{(\infty)}$ határérték létezik és független a kezdeti eloszlástól, akkor az vagy azonosan* 0*, vagy eloszlás. Ez utóbbi esetben $P^{(\infty)}$ az (1.21) egyenlet egyértelmű olyan megoldása, amely eloszlás.*

1.10. példa. *Egyszerűen látható, hogy a következő átmenetvalószínűség-mátrixszal jellemezhető Markov-láncra létezik a $P^{(\infty)}$ határérték, független $P^{(0)}$-tól és azonosan* 0 *(azaz a lánc nem stabil):*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ha az $\mathcal{X}$ Markov-lánc $i \in S$ állapota visszatérő, akkor az $f_{ii}^{(n)}$ feltételes valószínűségek valószínűségi eloszlást definiálnak a pozitív egész számok halmazán, ezt az eloszlást a visszatérési idő eloszlásának nevezzük. A visszatérési idő eloszlásának várható értéke, az átlagos visszatérési idő fontos szerepet játszik a továbbiakban.

1.11. definíció. *Az $i \in S$ állapotot* pozitív visszatérő*nek nevezzük, ha visszatérő és az átlagos visszatérési idő véges, azaz*

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} < \infty,$$

és nulla visszatérő*nek, ha visszatérő és*

$$m_i = \infty.$$

1.12. definíció. *Az $\mathcal{X}$ Markov-láncot* pozitív visszatérő*nek (illetve* nulla visszatérő*nek) nevezzük, ha minden állapota pozitív visszatérő (illetve nulla visszatérő).*

Markov-láncok határeloszlására vonatkozóan fő tételünk a következő:

1.9. tétel. *Ha az $\mathcal{X}$ Markov-lánc irreducíbilis, aperiodikus és visszatérő, akkor minden $i, j \in S$-re*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{m_j}.$$

Tehát ha a j állapot pozitív visszatérő, akkor a határeloszlásban $p_j > 0$, ha pedig j nulla visszatérő, akkor a határeloszlásban $p_j = 0$.

1.10. tétel. *$\mathcal{X}$ irreducíbilis, aperiodikus és visszatérő Markov-lánc esetén a pozitív visszatérő és a nulla visszatérő tulajdonságok öröklődők.*

BIZONYÍTÁS: Használjuk ismét az 1.2. tétel bizonyításának a jelöléseit. Ekkor

$$p_{jj}^{(n+r+s)} \geq ab p_{kk}^{(n)}, \tag{1.22}$$

ahonnan következik, hogy ha k pozitív visszatérő, akkor az 1.9. tétel miatt (1.22) jobb oldala egy pozitív számhoz tart, ezért a bal oldal sem tarthat 0-hoz, tehát j is pozitív visszatérő. Ha j nulla visszatérő, akkor (1.22) bal oldala 0-hoz tart, tehát a jobb oldal is 0-hoz tart, ezért k is nulla visszatérő. ■

Eddigi eredményeinket a következőképpen foglalhatjuk össze:

1.11. tétel. *Ha az $\mathcal{X}$ Markov-lánc irreducíbilis és aperiodikus, akkor két eset lehetséges:*

Pozitív visszatérő eset: *a lánc stabil, mégpedig minden $i, j \in S$-re*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$$

létezik, független i-től és pozitív, továbbá a határérték egy eloszlás.

Nem visszatérő vagy nulla visszatérő eset: *a lánc nem stabil, mégpedig minden $i, j \in S$-re*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

Mindkét esetben igaz, hogy minden $i \in S$-re és minden kezdeti eloszlásra

$$\lim_{n\to\infty} p_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}.$$

Az 1.11. tétel szerint a stabilitást a következő három tulajdonság garantálja együttesen (tehát ezek fennállta elégséges feltétel a stabilitásra):

- irreducibilitás,
- aperiodicitás,
- pozitív visszatérőség.

1.7. Foster-kritérium

Egy $\mathcal{X}$ homogén Markov-lánc stabilitására az 1.11. tétel ad elégséges feltételt. Az ott megkívánt tulajdonságok közül az irreducibilitást és az aperiodikusságot általában könnyebben, míg a pozitív visszatérőséget nehezen lehet ellenőrizni. A tétel jelentősége, hogy amennyiben egy irreducíbilis és aperiodikus Markov-lánc esetén létezik $i, j \in S$ úgy, hogy $p_{ij}^{(n)}$ nem 0-hoz tart, akkor az a lánc pozitív visszatérő, tehát stabil is. Ezt a tétel végén mondottak alapján úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha egy irreducíbilis és aperiodikus Markov-láncnak van legalább egy állapota, melynek valószínűsége nem 0-hoz tart, akkor az a lánc stabil.

A továbbiakban Foster egy eredményét mutatjuk meg, amely egy elégséges feltételt ad a stabilitásra, és amelynek bizonyítása az előző megjegyzésre épül.

1.12. tétel (Foster-kritérium). *Legyen az $\mathcal{X}$ Markov-lánc irreducíbilis és aperiodikus. Tegyük fel, hogy léteznek $I \geq 0$, $C > 0$ és $d > 0$ számok úgy, hogy $k \leq I$ esetén*

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = k) \leq C, \tag{1.23}$$

és $k > I$ esetén

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = k) \leq k - d. \tag{1.24}$$

Ekkor a lánc stabil.

BIZONYÍTÁS: A feltételek miatt tetszőleges $i \in S$-re a teljes várható érték tételének alkalmazásával

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_0 = i) &= \frac{\mathbf{E}\big(X_{n+1}\mathrm{I}_{\{X_0=i\}}\big)}{\mathbf{P}(X_0 = i)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\big(X_{n+1}\mathrm{I}_{\{X_n=k, X_0=i\}}\big)}{\mathbf{P}(X_0 = i)} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\big(X_{n+1}\mathrm{I}_{\{X_n=k,X_0=i\}}\big)}{\mathbf{P}(X_n=k,X_0=i)}\mathbf{P}(X_n=k\mid X_0=i) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(X_{n+1}\mid X_n=k,X_0=i)\mathbf{P}(X_n=k\mid X_0=i) = \\
&= \sum_{k=0}^{I} \mathbf{E}(X_{n+1}\mid X_n=k)\mathbf{P}(X_n=k\mid X_0=i) + \\
&\quad + \sum_{k=I+1}^{\infty} \mathbf{E}(X_{n+1}\mid X_n=k)\mathbf{P}(X_n=k\mid X_0=i) \le \\
&\le \sum_{k=0}^{I} C\mathbf{P}(X_n=k\mid X_0=i) + \\
&\quad + \sum_{k=I+1}^{\infty} (k-d)\mathbf{P}(X_n=k\mid X_0=i) = \\
&= \sum_{k=0}^{I} (C-k+d)\mathbf{P}(X_n=k\mid X_0=i) + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} (k-d)\mathbf{P}(X_n=k\mid X_0=i) \le \\
&\le (C+d)\mathbf{P}(X_n\le I\mid X_0=i) + \\
&\quad + \mathbf{E}(X_n\mid X_0=i) - d. \qquad (1.25)
\end{aligned}
$$

Ha be tudjuk látni, hogy $\mathbf{P}(X_n \le I \mid X_0 = i)$ határértéke pozitív, akkor létezik egy $0 \le j \le I$ állapot, melyre $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$ és az előzőekben mondottak miatt a lánc stabil.

Indirekt módon tegyük fel, hogy $\mathbf{P}(X_n \le I \mid X_0 = i)$ határértéke 0, ekkor $\varepsilon = d/2(C+d) > 0$-hoz létezik N úgy, hogy minden $n > N$-re

$$\mathbf{P}(X_n \le I \mid X_0 = i) < \frac{d}{2(C+d)},$$

azaz

$$(C+d)\mathbf{P}(X_n \le I \mid X_0 = i) - d < -\frac{d}{2}.$$

Ezt az (1.25) egyenlőtlenségbe helyettesítve minden $n > N$-re

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_0 = i) \le \mathbf{E}(X_n \mid X_0 = i) - \frac{d}{2},$$

ahol $d/2 > 0$, ebből viszont következik, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n \mid X_0 = i) = -\infty$, ami $X_n \ge 0$ miatt lehetetlen. Ezzel beláttuk, hogy $\mathbf{P}(X_n \le I \mid X_0 = i)$ határértéke nem lehet 0, és a bizonyítást befejeztük. ∎

1.8. Ergodicitás

Gondoljunk a fejezet elején bevezetett tömegkiszolgálási rendszerre. Tételezzük fel, hogy a rendszerben az n-edik időszelet végén lévő igények X_n száma homogén Markov-láncot alkot. Ha az $\{X_n\}$ lánc stabil, azaz a $\left\{p_i^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = i)\right\}$ valószínűség-eloszlásnak van egy egyértelmű $\{p_i\}$ határeloszlása, és ezt ki is tudjuk számolni vagy közelítőleg meg tudjuk határozni, akkor a rendszer viselkedéséről sok dolgot megállapíthatunk. Előfordulhat viszont, hogy a stabilitás tényét egyszerűen igazolhatjuk (pl. a Foster-kritériummal), de a határeloszlás kiszámolása nehézségekbe ütközik. Ilyen esetekben jó lenne tudni, hogy az $\{X_n\}$ lánc értékeinek megfigyeléséből tudunk-e következtetni a határeloszlás tagjainak nagyságára vagy a határeloszlás várható értékére. Vagyis igaz-e az, hogy az S állapothalmaz egy A részhalmazára az

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{I}_{\{X_i \in A\}}$$

relatív gyakoriság konvergál a

$$\sum_{k \in A} p_k$$

valószínűséghez, vagy az

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i$$

átlag konvergál a határeloszláshoz tartozó várható értékhez, azaz a

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_k$$

számhoz.

Az ellenkező irányú feladatkitűzésnek is van gyakorlati jelentősége. Tegyük fel, hogy A az állapotok egy olyan halmaza, mely a kiszolgáló rendszer „rossz” állapotait tartalmazza (például ha a rendszerben bentlévő igények száma nagy, akkor sokat kell egy új igénynek várakoznia), és valamilyen módon kiszámítottuk, hogy a határeloszlás szerint A-nak kicsi a valószínűsége. Ez a felhasználó számára nem mond túl sokat, őt az érdekli, hogy a szolgáltatás tömeges (sokszori) igénybevétele esetén milyen arányban kap „rossz” szolgáltatást, azaz mekkora a „rossz” állapotok relatív gyakorisága. Ha ez a relatív gyakoriság konvergál a határeloszlás szerinti valószínűséghez, akkor ez az érték már a felhasználó számára is jelentőséggel bír.

Ilyen jellegű, a nagy számok törvényével analóg tulajdonságok teljesülésekor a folyamatot ergodikusnak nevezzük. Az ergodicitás vizsgálata előtt vegyük észre, hogy itt nem számsorozatok, hanem valószínűségi változók sorozatának konvergenciájáról van szó. Először ennek különböző típusaiba engedünk betekintést.

1.13. definíció. *Az $\{Y_n\}$ valószínűségi változók sorozata* egy valószínűséggel *(vagy majdnem mindenütt) konvergál az Y valószínűségi változóhoz, ha*

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} Y_n = Y\right) = 1.$$

Például a nagy számok erős törvénye azt állítja, hogy ha az Y_n valószínűségi változók teljesen függetlenek és azonos eloszlásúak, továbbá $\mathbf{E}(Y_n)$ létezik, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i = \mathbf{E}(Y_0) \quad \text{egy valószínűséggel.}$$

1.14. definíció. *Az $\{Y_n\}$ valószínűségi változók sorozata* sztochasztikusan *(vagy valószínűségben) konvergál az Y valószínűségi változóhoz, ha minden $\varepsilon > 0$-ra*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|Y_n - Y| > \varepsilon) = 0.$$

Erre illusztráció a nagy számok gyenge törvénye, amely azt mondja ki, hogy ha az Y_n valószínűségi változók teljesen függetlenek és azonos eloszlásúak, továbbá $\mathbf{E}(Y_n)$ létezik, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i = \mathbf{E}(Y_0) \quad \text{sztochasztikusan.}$$

Bizonyítás nélkül közöljük, hogy az egy valószínűségű konvergencia maga után vonja a sztochasztikus konvergenciát, így a nagy számok gyenge törvényének itt ismertetett alakja következik a nagy számok erős törvényéből, ez magyarázza elnevezésüket.

1.15. definíció. *Az $\{Y_n\}$ valószínűségi változók sorozata L_1-ben konvergál az Y valószínűségi változóhoz, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|Y_n - Y|) = 0.$$

1.5. lemma. *Ha $Y_n \to Y$ L_1-ben, akkor $Y_n \to Y$ sztochasztikusan is.*

BIZONYÍTÁS: A Markov-egyenlőtlenség alapján minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\mathbf{P}(|Y_n - Y| > \varepsilon) \le \frac{\mathbf{E}(|Y_n - Y|)}{\varepsilon},$$

és a jobb oldal a feltétel szerint 0-hoz tart, tehát a bal is. ■

1.16. definíció. *Az $\{Y_n\}$ valószínűségi változók sorozata L_2-ben (vagy négyzetes középben) konvergál az Y valószínűségi változóhoz, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\Big((Y_n - Y)^2\Big) = 0.$$

1.6. lemma. *Ha $Y_n \to Y$ L_2-ben, akkor $Y_n \to Y$ L_1-ben is és sztochasztikusan is.*

BIZONYÍTÁS: Mivel minden Z valószínűségi változóra $\mathbf{E}\big(Z^2\big) \geq \mathbf{E}(Z)^2$, ezért

$$\mathbf{E}(|Y_n - Y|) \leq \sqrt{\mathbf{E}\Big((Y_n - Y)^2\Big)},$$

itt a jobb oldal 0-hoz tart, tehát a bal is. A sztochasztikus konvergencia az 1.5. lemmából következik. ■

Ezek után térjünk rá az ergodicitás fogalmának definiálására. Az erős ergodicitás általános értelemben sztochasztikus folyamatoknak egy olyan tulajdonsága, mely garantálja a nagy számok erős törvényének teljesülését. Erősen stacionárius $\{Y_n\}$ folyamat esetén ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_{i+N-1}) = \mathbf{E}(f(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{N-1})) \tag{1.26}$$

egy valószínűséggel minden pozitív N-re és minden olyan N-változós f függvényre, melyre a fenti várható érték véges. Ha az egy valószínűségű konvergencia helyett az (1.26) egyenletben csak sztochasztikus konvergencia teljesül, akkor gyenge ergodicitásról beszélünk. Az ergodicitás fogalmának nem stacionárius folyamatokra való értelmezésekor óvatosan kell eljárnunk, hiszen nem biztos, hogy az egydimenziós eloszlások várható értékei megegyeznek.

1.17. definíció. *A diszkrét idejű $\{Y_n\}$ folyamatot valamely $p \geq 1$-re L_p*-ben gyengén ergodikus*nak nevezzük, ha valamely m-re*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i - m\right|^p\right) = 0.$$

Általában a $p = 1$ vagy $p = 2$ értéket szokták vizsgálni, például az L_1-ben való gyenge ergodicitás azt jelenti, hogy az Y_i-k átlaga L_1-ben konvergál az m konstanshoz.

Először nézzük meg gyengén stacionárius folyamatok ergodicitását!

1.18. definíció. *Egy diszkrét idejű* $\{Y_n\}$ *sztochasztikus folyamatot* gyengén stacionárius*nak nevezünk, ha minden* n*-re* $\mathbf{E}\big({Y_n}^2\big) < \infty$*,*

$$\mathbf{E}(Y_n) = \mathbf{E}(Y_0)$$

és minden i*-re és* j*-re*

$$\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \mathbf{E}((Y_i - \mathbf{E}(Y_i))(Y_j - \mathbf{E}(Y_j))) = \mathrm{R}_{i-j},$$

azaz a kovariancia csak az indexek különbségétől függ. R_k*-t* kovarianciafüggvény*nek hívjuk (annak ellenére, hogy ez esetünkben egy számsorozat).*

Gyengén stacionárius folyamatok esetén egyszerű az L_2-ben való gyenge ergodicitást vizsgálni a következő tétel alapján:

1.13. tétel. *Gyengén stacionárius* $\{Y_n\}$ *folyamatra, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{R}_i = 0, \tag{1.27}$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i - \mathbf{E}(Y_0) \right|^2 \right) = 0. \tag{1.28}$$

A bizonyításhoz szükségünk lesz egy később is jól használható segédeszközre.

1.7. lemma (Toeplitz-lemma). *Ha* $a_{in} \geq 0$ $(i, n = 0, 1, 2, \ldots)$*, minden* n*-re*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{in} < \infty,$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} = a < \infty$$

úgy, hogy minden rögzített i*-re*

$$\lim_{n\to\infty} a_{in} = 0, \tag{1.29}$$

akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} b_i = ab.$$

BIZONYÍTÁS: Legyen

$$B = \sup_{n\geq 0} |b_n - b|,$$

$$A = \sup_{n\geq 0} \sum_{i=0}^{\infty} a_{in},$$

és egy $\varepsilon > 0$-ra N olyan, hogy

$$\sup_{n>N} |b_n - b| < \varepsilon.$$

Ekkor az (1.29) feltételből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{N} a_{in} = 0,$$

tehát létezik olyan M_1, hogy $n \geq M_1$-re

$$\sum_{i=0}^{N} a_{in} < \varepsilon.$$

Legyen továbbá M_2 olyan nagy, hogy $n \geq M_2$-re

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} - a \right| < \varepsilon.$$

Ekkor minden $n \geq \max(M_1, M_2)$-re

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} b_i - ab \right| &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} b_i - \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} b + \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} b - ab \right| \leq \\
&\leq \left| \sum_{i=0}^{\infty} a_{in}(b_i - b) \right| + \left| b \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{in} - a \right) \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} |b_i - b| + |b| \left| \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} - a \right| = \\
&= \sum_{i=0}^{N} a_{in} |b_i - b| + \sum_{i=N+1}^{\infty} a_{in} |b_i - b| + |b| \left| \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} - a \right| \leq \\
&\leq B\varepsilon + A\varepsilon + |b|\varepsilon = \\
&= (B + A + |b|)\varepsilon,
\end{aligned}$$

ahol $(B + A + |b|)$ nemnegatív konstans. ■

AZ 1.13. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: Legyen $m = \mathbf{E}(Y_0)$ és vezessük be az

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{R}_i$$

jelölést. Ekkor (1.27) miatt

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0. \tag{1.30}$$

Továbbá

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i - m\right|^2\right) &= \mathbf{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(Y_i - m)\right)^2\right) = \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}((Y_i - m)(Y_j - m)) = \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{R}_{j-i} = \\
&= \frac{\mathrm{R}_0}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1} \mathrm{R}_{j-i} = \\
&= \frac{\mathrm{R}_0}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\mathrm{R}_k. \qquad (1.31)
\end{aligned}$$

$\mathrm{R}_0 = \sigma^2(Y_0) < \infty$ miatt (1.31) első tagja 0-hoz tart. A második tagra

$$\begin{aligned}
\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\mathrm{R}_k &= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\left((k+1)S_{k+1} - kS_k\right) = \\
&= \frac{2}{n^2}\left(\sum_{k=2}^{n}(n-k+1)kS_k - \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)kS_k\right) = \\
&= \frac{2}{n^2}nS_n - \frac{2}{n^2}(n-1)S_1 + \\
&\quad + \frac{2}{n^2}\sum_{k=2}^{n-1}\left((n-k+1)k - (n-k)k\right)S_k = \\
&= \frac{2}{n}S_n - \frac{2(n-1)}{n^2}\mathrm{R}_0 + \frac{2}{n^2}\sum_{k=2}^{n-1}kS_k. \qquad (1.32)
\end{aligned}$$

(1.32) első tagja (1.30) miatt 0-hoz tart, második tagjában pedig $\mathrm{R}_0 = \sigma^2(Y_0)$, így az is konvergál 0-hoz. A harmadik tag a Toeplitz-lemma miatt tart 0-hoz (lásd az 1.47. feladatot), tehát (1.31) minden tagja 0-hoz konvergál és így az Y_i-k átlaga tart a közös várható értékhez L_2-ben. ■

Ennyi kitérő után térjünk rá a Markov-láncok gyenge ergodicitásának vizsgálatára. A fentiektől két ponton térünk el: egyrészt az $\mathcal{X}$ Markov-lánc nem stacionárius még gyengén sem, csupán konvergál az eloszlása, másrészt nem akarjuk feltenni, hogy a határeloszlás második momentuma véges, ezért itt a gyenge ergodicitást L_1-ben bizonyítjuk.

Egy homogén $\{X_n\}$ Markov-lánc az 1.12. feladat alapján mindig definiálható úgy, hogy megadjuk az X_0 eloszlását, a $\{W_n\}$ független, azonos eloszlású sorozatot és a $H(x,w)$ függvényt, továbbá

$$X_{n+1} = H(X_n, W_{n+1}) \quad (n \geq 0). \tag{1.33}$$

1.19. definíció. *Az $\mathcal{X}$ Markov-láncot* monoton típusú*nak nevezzük, ha a $H(x,w)$ függvény minden rögzített w-re az x változója szerint monoton növekedő, azaz minden $x_1 \leq x_2$-re és w-re*

$$H(x_1,w) \leq H(x_2,w).$$

Az $\mathcal{X} = \{X_n\}$ és $\mathcal{X}' = \{X'_n\}$ Markov-lánc (1.33) alakú előállítása legyen olyan, hogy csak a kezdeti eloszlás különbözik, a gerjesztő $\{W_n\}$ sorozat és a $H(\cdot,\cdot)$ függvény megegyezik. Ilyenkor (nem túl precíz szóhasználattal) azt fogjuk mondani, hogy a két lánc az $\mathcal{X}$ két változata. Ha $X_0 \leq X'_0$ és $\mathcal{X}$ monoton típusú, akkor (1.33) alapján teljes indukcióval az is látható, hogy minden n-re

$$X_n \leq X'_n.$$

Ha az X_n egy diszkrét idejű tömegkiszolgálási rendszerben az n-edik időegység végén a kiszolgálóban lévő igények számát írja le, akkor józan feltételezés a monotonitás, hiszen ez azt mondja, hogy ha a rendszer két példányából ez elsőben eredetileg kevesebb igény volt és ugyanúgy jönnek az igények mindkét kiszolgálóhoz, akkor az elsőben mindig legfeljebb annyi igény lesz, mint a másodikban. Például az 1.5. példában leírt, evolúciós egyenlettel adott lánc monoton, hiszen $x_1 \leq x_2$ esetén $(x_1 - v)^+ + y \leq (x_2 - v)^+ + y$.

1.14. tétel. *$X_0 \equiv 0$ esetén tegyük fel, hogy $\mathcal{X}$ monoton típusú, irreducíbilis, aperiodikus és pozitív visszatérő Markov-lánc. Ekkor tetszőleges $k \in S$-re*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{I}_{\{X_i = k\}} = p_k$$

sztochasztikusan, ahol $\{p_k\}$ *a határeloszlás. Ha még ráadásul*

$$\sum_{k=0}^{\infty} kp_k < \infty,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$$

sztochasztikusan.

A tétel első állítását bizonyítjuk. Ehhez tekintsük először a következő lemmát.

1.8. lemma. *Az 1.14. tétel feltételei mellett legyen* $\{X_n\}$ *és* $\{X'_n\}$ *az* $\mathcal{X}$ *Markov-lánc két változata úgy, hogy* $X_0 \equiv 0$*, és az* X'_0 *eloszlása a stacionárius eloszlás (amely megegyezik a határeloszlással). Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} (X_n - X'_n) = 0$$

egy valószínűséggel és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{I}_{\{X'_i = k\}} = p_k$$

sztochasztikusan.

BIZONYÍTÁS: A feltétel alapján $X_0 \le X'_0$, tehát a monotonitás miatt minden n-re $X_n \le X'_n$. Ebből következik, hogy ha egy N-re $X'_N = 0$, akkor minden $n \ge N$-re $X_n - X'_n = 0$, hiszen a gerjesztő sorozat azonos. Ez azt jelenti, hogy az

$$A_N = \{X'_N = 0\}$$

esemény maga után vonja a

$$B_N = \{X_n = X'_n \text{ minden } n \ge N\text{-re}\}$$

eseményt és így

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} A_N \subseteq \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N.$$

De

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} B_N = \left\{\text{létezik } N : X_n = X'_n \text{ minden } n \ge N\text{-re}\right\},$$

és ez utóbbi eseményből viszont következik, hogy az $X_n - X'_n$ tart 0-hoz, tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathbf{P}\Big(\lim_{n\to\infty}(X_n - X'_n) = 0\Big) \geq \mathbf{P}\left(\bigcup_{N=1}^{\infty}\{X'_N = 0\}\right).$$

Az első állítást beláttuk, ha

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{N=1}^{\infty}\{X'_N = 0\}\right) = 1, \tag{1.34}$$

ami az irreducibilitás és a visszatérőség miatt az 1.4. lemma alapján igaz (lásd az 1.48. feladatot).

Mivel X'_0 eloszlása a stacionárius eloszlás, ezért az 1.22. feladat alapján $\{X'_n\}$ erősen stacionárius, így az $\left\{\mathrm{I}_{\{X'_n=k\}}\right\}$ folyamat is erősen stacionárius (lásd az 1.49. feladatot). $\mathrm{I}_{\{X'_n=k\}}$ véges szórású, hiszen

$$\mathbf{E}\Big(\big(\mathrm{I}_{\{X'_n=k\}}\big)^2\Big) = \mathbf{E}\big(\mathrm{I}_{\{X'_n=k\}}\big) = \mathbf{P}(X'_n = k) = p_k \leq 1,$$

amiből az 1.45. feladat alapján következik $\left\{\mathrm{I}_{\{X'_n=k\}}\right\}$ gyenge stacionaritása is. A kovarianciafüggvény határértékére

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}&\left|\mathbf{E}\Big(\big(\mathrm{I}_{\{X'_0=k\}} - p_k\big)\big(\mathrm{I}_{\{X'_n=k\}} - p_k\big)\Big)\right| = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\mathbf{P}(X'_0 = k, X'_n = k) - {p_k}^2\right| = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\mathbf{P}(X'_n = k | X'_0 = k)\mathbf{P}(X'_0 = k) - {p_k}^2\right| = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\mathbf{P}(X'_n = k | X'_0 = k) - p_k\right| p_k = 0
\end{aligned}$$

a stabilitásból következően. A kovarianciafüggvény tehát 0-hoz tart, így a Toeplitz-lemma miatt a kovarianciák átlaga is 0-hoz konvergál. Ekkor viszont a gyenge stacionaritást figyelembe véve alkalmazhatjuk az 1.13. tételt, amelyből

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{I}_{\{X'_i=k\}} - p_k\right|^2\right) = 0,$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{I}_{\{X'_i=k\}} = p_k$$

négyzetes középben, amiből az 1.6. lemmára tekintettel következik a sztochasztikus konvergencia. ■

AZ 1.14. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: Nyilván

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{I}_{\{X_i=k\}} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{I}_{\{X_i'=k\}} + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\mathrm{I}_{\{X_i=k\}} - \mathrm{I}_{\{X_i'=k\}}\Big).$$

A jobb oldal első tagja az 1.8. lemma miatt tart p_k-hoz sztochasztikusan, míg a második konvergál 0-hoz, mivel egy véletlen i index után az összeg tagjai nullák. ■

1.9. Késleltetés

Egy diszkrét idejű tömegkiszolgálási rendszerről tegyük fel, hogy az n-edik időegység végén a kiszolgálóban lévő igények számából alkotott $\{X_n\}$ folyamat Markov-lánc, ahol $X_0 \equiv 0$. Ha a lánc stabil, akkor a határeloszlás nagy n-re közelítőleg megadja a sorhossz eloszlását illetve várható értékét, tehát a rendszer tervezőjét, üzemeltetőjét érdeklő adatokat. A felhasználók persze nem erre kíváncsiak, hanem arra, hogy egy igényt a rendszer átlagosan mennyi idő alatt dolgoz fel. Szeretnénk kiszámítani tehát az igények átlagos késleltetését, pontosabban annak az időnek a hosszú idejű átlagát, amit egy igény a rendszerben eltölt. Jelölje D_n az első, második, ..., n-edik időegységben beérkezett igények összes késleltetését és R_n az ugyanezen időszeletekben beérkezett igények számát. Ha a $\{D_n/R_n\}$ valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergens, akkor az átlagos késleltetés ennek a határértékeként definiálható, azaz

$$\bar{D} = \lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{R_n}$$

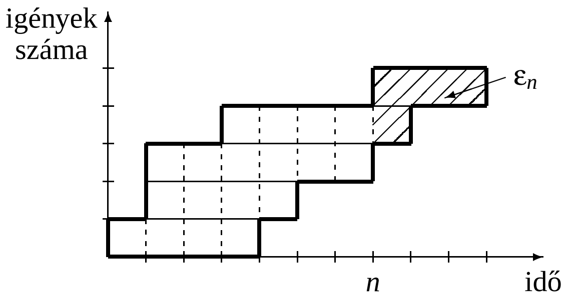
sztochasztikusan.

1.15. tétel (Little-formula). *Ha $Y_1, Y_2, \ldots$ az egymás utáni időegységekben érkező igények száma, amelyről feltesszük, hogy független, azonos eloszlású sorozat, akkor*

$$\bar{D} = \frac{\mathbf{E}(X_0')}{\mathbf{E}(Y_1)},$$

ahol X_0' eloszlása a határeloszlás.

Az 1.15. tétel további feltételek nélkül nem igaz minden sorbanállási modellre, de a legtöbbre igaz. Itt most egy szemléltetést adunk rá.



1.2. ábra. A késleltetés kiszámítása

Az első n időegységben érkezett igények késleltetését úgy is megkaphatjuk, hogy nem az egyes igények rendszerben töltött időit adjuk össze, hanem az egyes időszeletekben késleltetett igények számát összegezzük időszakaszonként, azaz

$$D_n = \sum_{j=0}^{n-1} X_j + \varepsilon_n,$$

ahol ε_n az n-edik időegység végén kiszolgálásra váró X_n igény hátralévő késleltetése (1.2. ábra).

Igen általános körülmények között ε_n-nek van határeloszlása és ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = 0 \tag{1.35}$$

sztochasztikusan. Ha a

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} D_n$$

és a

$$\nu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} R_n$$

sztochasztikus határértékek léteznek, akkor

$$\bar{D} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Mivel

$$R_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j,$$

ezért a nagy számok gyenge törvényéből

$$\nu = \mathbf{E}(Y_1).$$

Másrészt az 1.14. tételben leírt monoton típusú, irreducíbilis, aperiodikus és pozitív visszatérő Markov-láncra

$$\mu = \mathbf{E}(X_0'),$$

ahonnan a Little-formula már következik.

Az 1.15. tétel igazsága azon múlik, hogy (1.35) teljesül-e. Ezt általában úgy ellenőrzik, hogy megmutatják ε_n gyenge ergodicitását, vagyis azt, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i \to c < \infty$$

sztochasztikusan, valamilyen c-re. Ekkor ugyanis egyrészt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i \to 0,$$

másrészt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_n}{n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i,$$

ahol tehát mindkét tag nullához tart.

1.10. Feladatok

1.1. feladat$^{(*)}$. *Lássuk be az (1.1) egyenlőséget!*

1.2. feladat$^{(*)}$. *Bizonyítsuk be, hogy a Markov-tulajdonság ekvivalens a következővel: minden $m \geq 1$-re, $0 \leq n_0 < n_1 < \ldots < n_m$-re és $x_{n_0}, \ldots, x_{n_m} \in S$-re*

$$\mathbf{P}\big(X_{n_m} = x_{n_m} \mid X_{n_{m-1}} = x_{n_{m-1}}, \ldots, X_{n_0} = x_{n_0}\big) = \\ = \mathbf{P}\big(X_{n_m} = x_{n_m} \mid X_{n_{m-1}} = x_{n_{m-1}}\big)!$$

1.3. feladat$^{(*)}$. *Bizonyítsuk be az (1.2) egyenlőséget!*

1.4. feladat. *Bizonyítsuk be az (1.4) állítást!*

1.5. feladat. *Tekintsük a*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

átmenetmátrixszal megadott Markov-láncot. Mennyi a $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 2)$ kétlépéses átmenetvalószínűség értéke? Mi X_2 eloszlása, ha a Markov-láncot a $P^{(0)} = (1,0,0)$ eloszlásból indítjuk?

1.6. feladat. *Legyen a Markov-lánc átmeneti mátrixa a következő:*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tegyük fel, hogy X_0 eloszlása $(0,1,0)$. Mi lesz az X_3 eloszlása?

1.7. feladat. *Tekintsük a három állapottal rendelkező Markov-láncot, melynek átmeneti mátrixa*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Tegyük fel, hogy a lánc kiindulási állapotának eloszlása: $\mathbf{P}(X_0 = 1) = 0.7$, $\mathbf{P}(X_0 = 2) = 0.2$, $\mathbf{P}(X_0 = 3) = 0.1$. *Mi lesz X_1 eloszlása?*

1.8. feladat. *Szabályos dobókockával dobunk, és azt tartjuk számon, hogy az eddigi dobások közül mekkora a legnagyobb. Vagyis n dobás után a Markov-láncunk a j állapotban van, ha az első n dobás során a legnagyobb dobott érték j. Írd fel az átmenetvalószínűség-mátrixot! Mennyi a* $\mathbf{P}(X_2 = 4 \mid X_0 = 3)$ *kétlépéses átmenetvalószínűség értéke?*
Mi X_2 eloszlása, ha a Markov-láncot a $P^{(0)} = (0,1,0,0,0,0)$ eloszlásból indítjuk?

1.9. feladat. *Legyen $X_1, \ldots X_n, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata,* $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1/2$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1/2$ *eloszlással. Legyen $Y_n = X_1 + \ldots + X_n$. Bizonyítsuk be, hogy $\{Y_n\}$ Markov tulajdonságú! Mi az Y_n eloszlása?*

1.10. feladat. *Legyen $\{X_n\}$ Markov-lánc* $\mathbf{\Pi}$ *átmenetvalószínűség-mátrixszal. Legyen $Y_n = X_{kn}$. Bizonyítsuk be, hogy $\{Y_n\}$ is Markov-lánc és számítsd ki az átmenetvalószínűség-mátrixát!*

1.11. feladat$^{(*)}$. *Legyen X_0 valószínűségi változó, amely értékeit egy megszámlálható I halmazból veszi. Legyen $Y_1, Y_2, \ldots$ független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata. Tekintsük adottnak a következő H függvényt:*

$$H : I \times [0,1] \to I,$$

és definiáljuk X_n-et a következő rekurzió szerint:

$$X_{n+1} = H(X_n, Y_{n+1}).$$

Bizonyítsuk be, hogy $\{X_n\}$ Markov-lánc és fejezzük ki a $\mathbf{\Pi}$ *átmenetvalószínűségi mátrixot H segítségével!*

1.12. feladat$^{(*)}$. *Lássuk be az 1.1. tétel következő megfordítását: minden homogén $\mathcal{X}$ Markov-lánchoz létezik $X_0 \in S$ valószínűségi változó, $\{W_n\}$ független, $[0,1]$-en egyenletes eloszlású sorozat, amely független X_0-tól is és egy $H : S \times [0,1] \to S$ kétváltozós függvény úgy, hogy az*

$$X_{n+1} = H(X_n, W_{n+1}) \quad (n \geq 0)$$

rekurziót X_0-ból indítva $\mathcal{X}$-et kapjuk!

1.13. feladat. *Tekintsük az $X_{n+1} = (X_n - 1 + Y_{n+1})^+$ sorozatot. Milyen feltételekkel lesz ez Markov-lánc? Mikor lesz homogén?*

1.14. feladat. *Tekintsük az $X_{n+1} = X_n + W_{n+1}$ mod 4 egyenlet által megadott $\{X_n\}$ Markov-láncot, ahol a W_n sorozat egymástól és X_0-tol független, azonos eloszlású, nemnegatív, egész értékű valószínűségi változókból áll (ciklikus bolyongás). W_n milyen eloszlása esetén lesz $\{X_n\}$ stabil és mi lesz $\{X_n\}$ határeloszlása?*

1.15. feladat. *Lássuk be, hogy egy homogén Markov-lánc $i \in S$ állapotában való tartózkodási ideje $1 - p_{ii}$ paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó!*

1.16. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy homogén Markov-lánc akkor és csak akkor független és azonos eloszlású, ha az átmenetmátrixának sorai egyformák és egyenlőek $P^{(0)}$-lal, a kezdeti eloszlással!*

1.17. feladat. *Döntsük el, hogy a megadott átmeneti mátrixszal rendelkező Markov-lánc irreducíbilis-e, illetve aperiodikus-e?*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix},$$

ahol $p \neq 0,\ q \neq 0,\ p + q = 1$.

1.18. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{\Pi}$ mátrix főátlójának és szomszédos két mellékátlójának minden eleme pozitív, akkor a lánc irreducíbilis és aperiodikus!*

1.19. feladat. *Mutassuk meg a következőt: ha minden $i, j \in S$-re, melyre $|i - j| = 1$, igaz, hogy létezik $n_{ij} > 0$ úgy, hogy $p_{ij}^{(n_{ij})} > 0$, akkor a lánc irreducíbilis!*

1.20. feladat. *Irreducíbilis-e az 1.8. feladatban adott Markov-lánc? Aperiodikus-e?*

1.21. feladat. *Bizonyítsuk be az (1.10) és (1.11) képletet!*

1.22. feladat. *Mutassuk meg, hogy egy Markov-lánc akkor és csak akkor erősen stacionárius, ha azonos eloszlású sorozat!*

1.23. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy véges állapotú Markov-láncra a következő négy tulajdonság ekvivalens:*

- *a lánc stabil;*
- *minden* $i, j \in S$*-re* $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ *létezik és nem függ* i*-től;*
- *minden* $j \in S$*-re* $\lim_{n\to\infty} M_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} m_j^{(n)}$*;*
- *minden* $j \in S$*-re* $\lim_{n\to\infty} \left(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\right) = 0$*!*

1.24. feladat. *Tekintsük a*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

átmenetvalószínűség-mátrixszal adott Markov-láncot. Mi a határeloszlása?

1.25. feladat. *Tekintsük a következő* $\mathbf{\Pi}$ *átmenetmátrix által megadott Markov láncot. Stabil-e ez a lánc?*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.26. feladat. *Milyen* p *és* q *értékekre lesz stabil az alábbi átmenetmátrixszal megadott Markov-lánc? Mi ekkor a határeloszlás?*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q \end{pmatrix}$$

1.27. feladat. *Ha tegnap esett az eső, akkor legyen* α *annak a valószínűsége, hogy ma is esni fog. Ha tegnap nem esett akkor annak a valószínűsége, hogy ma esni fog legyen* β*. Számítsuk ki az eső valószínűségének határeloszlását!*

1.28. feladat. *Egy bolha egy háromszög csúcspontjain ugrál, úgy hogy minden lehetséges ugrásnak ugyanakkora a valószínűsége. Mi annak a valószínűsége, hogy az n-edik lépés után ugyanott lesz ahonnan indult?*
Hogyan alakul ez a valószínűség, hogy ha a bolha kétszer akkora valószínűséggel ugrik az óramutató járásával megegyező irányba, mint azzal ellentétesen?

1.29. feladat. *Adjunk példát három állapotú nem stabil Markov-láncra!*

1.30. feladat. *Egy diák 3 könyvet tart a polcán. Minden reggel véletlenszerűen kiválaszt egy könyvet a három közül, függetlenül a korábbi választásaitól. Annak a valószínűsége, hogy az i-edik könyvet választja* α_i*, ahol* $0 < \alpha_i < 1$*,* $i = 1,2,3$*. Minden este a könyvet visszateszi a polc elejére. Jelöljük* p_n*-nel annak valószínűségét, hogy az* n*-edik reggelen a diák a könyveit az* $1,2,3$ *sorrendben találja. Add meg a* p_n *valószínűséget* $n \to \infty$ *esetén!*

1.31. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy Markov-láncra* $\lim_{n\to\infty} p_i^{(n)} = 0$ *akkor és csak akkor teljesül minden* $i \in S$*-re, ha* $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{i} p_j^{(n)} = 0$ *minden* $i \in S$*-re!*

1.32. feladat. *Lássuk be, hogy minden* $n \geq 0$*-ra és* $i, j \in S$*-re* $f_{ij}^{(n)} \leq p_{ij}^{(n)}$*, továbbá hogy* $n = 1$ *esetén a két mennyiség megegyezik!*

1.33. feladat. *Pozitív visszatérő-e az 1.8. feladatban adott Markov-lánc 1-es állapota?*

1.34. feladat. *Tekintsük a*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

átmenetvalószínűség-mátrixszal adott bináris Markov-láncot, ahol $0 < p < 1$*,* $0 < q < 1$*. Számítsuk ki a következő mennyiségeket:* $f_{00}^{(n)}$*,* $f_{11}^{(n)}$*,* $m_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)}$*,* $m_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)}$*.*

1.35. feladat. *Tegyük fel, hogy az 1.26. feladatban p és q értékét úgy választottuk, hogy a Markov-lánc stabil. Igaz-e, hogy ebben az esetben az* 1*-es állapot nulla visszatérő? Mekkora az* m_1 *várható visszatérési idő?*

1.36. feladat. *Tekintsük a következő állapotátmeneti mátrixszal adott végtelen állapotú Markov láncot (véletlen bolyongás):* $p_{i,i-1} = p,\ p_{i,i+1} = q = 1-p$ *minden* $i \geq 1$*-re,* $p_{0,0} = p,\ p_{0,1} = q = 1-p$*.*
Bizonyítsuk be az alábbi állításokat:

a) az állapotok nem visszatérők, ha $p \neq \frac{1}{2}$

b) az állapotok nulla-visszatérők, ha $p = \frac{1}{2}$

1.37. feladat. *Tekintsük az adott átmenet mátrixú láncot.*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Irreducíbilis-e a lánc? Aperiodikus-e a lánc? Pozitív visszatérő-e a lánc?

1.38. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges véges állapotú Markov-láncnak nincs nulla visszatérő állapota, és nem lehet az összes állapota nem visszatérő!*

1.39. feladat. *Nagyesze professzor a vizsgaidőszak egy adott percében* p *valószínűséggel beír egy jegyet egy indexbe,* $1-p$ *valószínűséggel pedig a titkárnőjének udvarol. Legyen* q *annak a valószínűsége, hogy egy adott percben egy újabb jegyre éhes hallgató érkezik a professzorhoz (*$1-q$ *valószínűséggel nem érkezik senki). Írjuk fel a professzor szobája előtt tekergő sor hosszára vonatkozó átmenetmátrixot! Milyen* p *és* q *értékek mellett lesz a Markov-lánc stabil?*

1.40. feladat. *Tekintsük a következő játékot. Ha* i *Ft-ja van a játékosnak* $(0 < i < N)$*, akkor* p *valószínűséggel nyer 1 Ft-ot, és* $1-p$ *valószínűséggel veszít 1 Ft-ot* $(0 < p < 1)$*. Ha 0 Ft-ja van, akkor* $1-p$ *valószínűséggel nem változik a pénze és* p *valószínűséggel nyer 1 Ft-ot. Ha* N *Ft-ja van, akkor* p *valószínűséggel nem változik a vagyona, és* $1-p$ *valószínűséggel veszít 1 Ft-ot. Írjuk fel az átmeneti mátrixot! A Markov lánc stabil-e? Ha igen, akkor adjuk meg a határeloszlást! Ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nincs határeloszlás!*

1.41. feladat. *Bergengóciában az utóbbi időben túl sokan dőltek a kardjukba azért, mert a kaszinóban elvesztették utolsó darab fehérneműjüket is. Ezért a kormány úgy érezte, hogy egy sokkal barátságosabb szerencsejátékra van szükség. Hamarosan előálltak az új játék, a* Bankrobi *tervével: Ha a játékosnak* $i > 0$ *Ft-ja van, akkor egy játékban* p *valószínűséggel nyerjen 1 Ft-ot, és* $1-p$ *valószínűséggel veszítsen 1 Ft-ot* $(0 < p < 1)$*. Ha 0 Ft-ja van, akkor* $1-p$ *valószínűséggel ne változzon a pénze és* p *valószínűséggel nyerjen 1 Ft-ot. Tudni lehet még, hogy a kaszinó végtelen sok pénzzel rendelkezik. (Ennek okát ne firtassuk, talán egy aranybánya, de az is lehet, hogy egyszerűen csak közel áll a kormányhoz.) Írjuk fel a játékos pénzére vonatkozó átmenetmátrixot! Milyen* p *értékek mellett lesz stabil a Markov-lánc? Mi ekkor a határeloszlása?*

1.42. feladat. *Milyen p és q esetén lesz a következő átmenetvalószínűség-mátrixszal adott végtelen állapotú Markov-lánc stabil?*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1-p-q & p & q & 0 & 0 & \dots \\ 1-p-q & p & q & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1-p-q & p & q & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-p-q & p & q & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

1.43. feladat. *Milyen a,b számokra lesz a következő átmenetvalószínűség-mátrixszal adott végtelen állapotú Markov lánc stabil?*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1-a-b & a & b & 0 & 0 & \dots \\ 1-a-b & a & b & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1-a-b & a & b & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-a-b & a & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Legyen $a = 0$ és $b = 1/4$. Mi ekkor a határeloszlás?

1.44. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy gyengén stacionárius folyamat kovarianciafüggvénye szimmetrikus az origóra!*

1.45. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy véges szórású erősen stacionárius folyamat egyben gyengén stacionárius is!*

1.46. feladat. *A Toeplitz-lemma alapján bizonyítsuk be, hogy ha $\{b_n\}$ tetszőleges konvergens sorozat és $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_i = b!$$

(Gyakran erre a következményre hivatkozunk Toeplitz-lemmaként.)

1.47. feladat. *Mutassuk meg, hogy az 1.13. tétel bizonyításának második felében*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} \sum_{k=2}^{n-1} kS_k = 0!$$

1.48. feladat. *Irreducíbilis és visszatérő $\{X_n'\}$ láncra lássuk be az (1.34) egyenlőséget!*

1.49. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha az $\{X_n\}$ diszkrét idejű folyamat erősen stacionárius és $Y_n = f(X_n)$, akkor az $\{Y_n\}$ folyamat is erősen stacionárius!*

1.50. feladat$^{(*)}$. *Tekintsük az alábbi állapotátmeneti mátrixszal adott Markov-láncot*

$$p_{i,i+1} = p_i,\ \ p_{i,i-1} = q_i = 1 - p_i,\ \ i = 0, 1, 2, \ldots,$$

ahol $p_0 = 1$. Bizonyítsuk be, hogy a lánc akkor és csak akkor pozitív visszatérő, ha

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_0 \ldots p_j}{q_1 \ldots q_{j+1}} < \infty$$

1.51. feladat. *Tekintsük a következő állapotátmeneti valószínűségekkel adott Markov láncot a $0, 1, 2, \ldots$ végtelen állapottéren.*

$$p_{0,i} = p_i > 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} i p_i < \infty, \quad p_{i,i-1} = 1 \quad (i \geq 1)$$

Mutassuk meg, hogy a lánc irreducíbilis, aperiodikus, pozitív visszatérő és adjuk meg a stacionárius eloszlását!

1.52. feladat. *Tegyük fel, hogy egy autót 0.5 valószínűséggel mosnak le egy adott percben (ugyanekkora valószínűséggel egyet sem mosnak le). Legyen 0.6 annak a valószínűsége, hogy egy adott percben nem érkezik új autó az autómosóba és 0.4 valószínűséggel egy autó érkezik. Stacionárius eloszlást feltéve mi a valószínűsége annak, hogy nem tudok beállni az autómosóba, ha ott az éppen mosott autóval együtt csak három autó várakozhat? (Kész autó a perc végén távozik, érkezés a percen belül történik.)*

1.53. feladat$^{(*)}$. *Egy szerencsejátékos 2 dollárral kezd játszani és a legrövidebb idő alatt el akarja érni, hogy 10 dollárra növelje vagyonát. A játékszabály a következő. Egy szabályos érmét dobunk föl és a játékosunk el kell találja, hogy fej vagy írás lesz-e a dobásból. Ha eltalálta akkor nyer annyi pénzt amekkora a tétje volt (és természetesen a föltett pénzt is visszakapja), ellenkező esetben elveszti a tétjét. A játékos a következő stratégiát választja. Mindaddig amíg 5 vagy annál kevesebb dollárja van az egészet fölteszi, különben pedig csak annyit tesz föl amennyi nyerése eseten épp arra elegendő, hogy pont 10 dollárja legyen.*
Bizonyítsuk be, hogy a szerencsejátékos 1/5 valószínűséggel fogja elérni célját!

1.54. feladat. *Tegyük fel, hogy van N darab esernyőnk, amelyeknek egy részét otthon egy másik részét a munkahelyünkön tartjuk. Minden reggel elmegyünk a munkahelyünkre. Ha esik az eső, és van otthon ernyőnk, akkor magunkkal viszünk egy ernyőt. Ugyanígy, ha este elindulunk haza, és esik az eső, és van* *ernyőnk a munkahelyen, akkor magunkkal viszünk egyet. Ha nem esik az eső, akkor nem viszünk magunkkal ernyőt. Hosszú időre tekintve mi a valószínűsége annak, hogy elázunk, feltéve hogy minden indulásunkkor p valószínűséggel esik az eső függetlenül a korábbi időjárástól?*

1.55. feladat$^{(*)}$. *Egy operaénekesnő minden este koncertet kellene adjon. Minden este a fellépés után 1/2 valószínűséggel visszavonul, és a további estéken mindaddig nem lép fel újra, amíg a menedzsere ki nem engeszteli. Ezt a menedzser úgy próbálja elérni, hogy minden nap virágot küld az énekesnőnek mindaddig, amíg az vissza nem tér. Ha x ezer dollárért vásárolt már virágot az $\sqrt{x}$ valószínűséggel fogja kiengeszteli az énekesnőt. Ha a menedzser minden koncerten 750 dollárt keres, mennyi pénzt érdemes virágra költenie?*

1.56. feladat. *Tekintsünk egy szerencsejátékost, aki minden egyes játék alkalmával p valószínűséggel nyer 1 dollárt és $q = 1 - p$ valószínűséggel veszít 1 dollárt. Ha az egymást követő játékok egymástól függetlenek, mi annak a valószínűsége, hogy i dollárral indulva a játékosnak N dollárja lesz? (Természetesen úgy, hogy közben a vagyona egyszer sem csökken 0-ra).*

1.57. feladat. *N darab fehér és N darab fekete golyó van szétosztva két urnába úgy, hogy mindegyikben pontosan N darab golyó van. Definiáljuk a rendszer állapotát a következőképpen. Az i-edik állapot ($i = 0, 1 \dots, N$) jelentse azt, hogy az első urnában i darab fekete golyó van. Minden lépesben egy-egy golyót húzunk az első illetve a második urnából. Azt a golyót amelyiket az első urnából húztunk a második urnába tesszük vissza, míg a másodikból húzottat az elsőbe tesszük. Adjuk meg a p_{ij} állapotátmeneti valószínűségeket!*

1.58. feladat. *Dobjunk egy szabályos dobókockával n-szer egymás után és tegyük fel, hogy a dobások egymástól függetlenek. Legyen X_n az összege az n dobás során kapott értékeknek. Számítsuk ki a következő határértéket*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \text{ osztható 13-mal}).$$

1.59. feladat. *Legyen i és j egy diszkrét idejű Markov-lánc két állapota. Bizonyítsuk be, hogy ha i és j egymásból kölcsönösen elérhető, vagyis $\exists n \geq 0, p_{ij}^{(n)} > 0$ és $\exists m \geq 0, p_{ji}^{(m)} > 0$, akkor pozitív annak a valószínűsége, hogy i-ből elérjük a j-t anélkül, hogy közben visszatérnénk i-be.*

1.60. feladat. *Egy átmenetvalószínűség-mátrixot duplán sztochasztikusnak nevezünk, ha az oszlopok összege is 1-et ad, vagyis $\sum_i p_{ij} = 1 \; \forall j \in S$. Bizonyítsuk be, hogy egy véges állapotú duplán sztochasztikus állapotátmeneti mátrix esetén ha a lánc stabil, akkor a határeloszlás egyenletes.*

2. fejezet

Diszkrét idejű tömegkiszolgálási modellek

Ebben a fejezetben diszkrét idejű tömegkiszolgálási rendszerre mutatunk konkrét példát, és ezen tanulmányozzuk, hogy a Markov-láncok elméletéről tanultak hogyan alkalmazhatóak gyakorlati feladatok megoldására.

Modellünkben az időt egységekre osztjuk. A kiszolgálóhoz tartozó sorban tetszőlegesen nagy számú igény várakozhat, a szolgáltatáshoz való hozzáférés érkezési sorrendben történik (FCFS). A rendszer tervezőjét a várakozási sor hosszának alakulása, a felhasználókat pedig az igények várakozási ideje érdekli.

2.1. Evolúciós egyenlet sorhosszra

A rendszerben a kezdő (nulladik) időpillanatban X_0 igény van. Vezessük be a következő jelöléseket:
X_n a sorhossz az n-edik időegység végén;
Y_n az n-edik időegységben érkezett új igények száma;
V_n azt mutatja meg, hogy a kiszolgáló a kapacitásából mennyit képes kiszolgálásra fordítani az n-edik időegységben, azaz legfeljebb hány várakozó igénynek tud szolgáltatást nyújtani.

A bevezetett mennyiségekről feltesszük, hogy
$\{Y_n\}$ független és azonos eloszlású sorozat;
$\{V_n\}$ is független és azonos eloszlású;
$\{V_n\}$ független $\{Y_n\}$-től;
az $\{\{Y_n\},\{V_n\}\}$ pár független X_0-tól.

Ekkor a sorhossz változását a következő evolúciós egyenlet írja le:

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})^+ + Y_{n+1}, \tag{2.1}$$

azaz a sorhossz az $(n+1)$-edik időszakasz végén V_{n+1}-gyel csökken, ha van ennyi kiszolgálandó igény, és Y_{n+1}-gyel nő.

A 2.2. szakaszban részletesen foglalkozunk néhány gyakorlatban is érdekes problémakörrel, melynek megoldása visszavezethető erre a modellre. A csomagkoncentrátor esetén a különböző állomásokról érkező csomagok állnak sorba, és a kiszolgáló egy időegységben egy csomagot szolgál ki (azaz továbbít). A megszakításos csomagkoncentrátor az előzőtől abban különbözik, hogy ekkor a kiszolgáló nem mindig áll rendelkezésre. A prioritásos csomagkoncentrátornál a koncentrátornak N-féle prioritású csomagot kell kiszolgálni. Ennek megfelelően N sor képződik, és az i-edik sor 1-gyel csökkenhet, ha az első, második,..., $i-1$-edik sor üres.

2.1.1. Stabilitás

Feltételeinkből és az 1.1. tételből következik, hogy a (2.1) rekurzióval definiált $\{X_n\}$ folyamat homogén Markov-lánc (lásd még az 1.5. példát is), melynek átmenetvalószínűségei

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \mathbf{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) = \\ &= \mathbf{P}\big((X_0 - V_1)^+ + Y_1 = j \mid X_0 = i\big) = \\ &= \mathbf{P}\big((i - V_1)^+ + Y_1 = j\big) \end{aligned}$$

alakúak. Ennek a láncnak a stabilitására elégséges feltételt ad a következő tétel.

2.1. tétel. *Tegyük fel, hogy*

$$p_{ij} > 0, \text{ ha vagy } i = 0 \text{ és } j = 0, 1 \text{ vagy } i > 0 \text{ és } j = i-1, i, i+1, \tag{2.2}$$

továbbá

$$\mathbf{E}(Y_1) < \mathbf{E}(V_1) < \infty. \tag{2.3}$$

Ekkor az $\{X_n\}$ Markov-lánc stabil.

BIZONYÍTÁS: Könnyen ellenőrizhető, hogy (2.2) miatt az $\{X_n\}$ egy irreducíbilis és aperiodikus Markov-lánc, hiszen az átmenetvalószínűség-mátrix főátlójában és a vele szomszédos két mellékátlóban levő elemek pozitívak. Elég tehát megmutatni, hogy $\{X_n\}$ pozitív visszatérő, amelyhez ellenőrizzük a Foster-kritériumot (1.12. tétel).

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = k) &= \mathbf{E}\big((X_n - V_{n+1})^+ + Y_{n+1} \mid X_n = k\big) = \\
&= \mathbf{E}\big((k - V_{n+1})^+ + Y_{n+1} \mid X_n = k\big) = \\
&= \mathbf{E}\big((k - V_{n+1})^+ + Y_{n+1}\big) = \\
&= \mathbf{E}\big((k - V_1)^+ + Y_1\big), \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti lépésben azt használtuk ki, hogy X_n a $V_1,\ldots,V_n,Y_1,\ldots,Y_n$ és X_0 függvénye, valamint $\{V_j\}$ és $\{Y_j\}$ emlékezetnélküliek, függetlenek X_0-tól, továbbá egymástól is függetlenek, ezért $(k - V_{n+1})^+ + Y_{n+1}$ és X_n függetlenek, míg az utolsó lépés az $\{(Y_n,V_n)\}$ stacionaritása miatt igaz. A (2.3) és (2.4) kifejezésekből következik, hogy minden $k \geq 0$-ra

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = k) = \mathbf{E}\big((k - V_1)^+ + Y_1\big) \leq k + \mathbf{E}(Y_1) < \infty,$$

azaz bármely $I \geq 0$-ra, ha $k \leq I$, akkor

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = k) \leq k + \mathbf{E}(Y_1) \leq I + \mathbf{E}(Y_1) = C < \infty,$$

vagyis (1.23) teljesül minden I-re. Legyen

$$d = \frac{1}{2}(\mathbf{E}(V_1) - \mathbf{E}(Y_1)),$$

ekkor (2.3) miatt $d > 0$. Válasszuk I-t úgy, hogy $k > I$-re

$$\sum_{j=1}^{k} j\,\mathbf{P}(V_1 = j) \geq \mathbf{E}(V_1) - d$$

(ez megtehető, hiszen a bal oldalon álló összeg k-val monoton növő módon tart $\mathbf{E}(V_1)$-hez, amely véges). Ekkor $k > I$ esetén

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big((k - V_1)^+\big) &= \sum_{i=0}^{k} i\,\mathbf{P}\big((k - V_1)^+ = i\big) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} i\,\mathbf{P}(V_1 = k - i) = \\
&= \sum_{j=1}^{k} (k - j)\mathbf{P}(V_1 = j) = \\
&= k\sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}(V_1 = j) - \sum_{j=1}^{k} j\,\mathbf{P}(V_1 = j) \leq \\
&\leq k - \mathbf{E}(V_1) + d,
\end{aligned}$$

tehát

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = k) = \mathbf{E}\big((k - V_1)^+ + Y_1\big) \leq k - \mathbf{E}(V_1) + d + \mathbf{E}(Y_1) = k - d,$$

így a Foster-kritérium teljesül, amivel a stabilitást is bebizonyítottuk. ■

A (2.3) feltétel azt kéri, hogy az időegység alatt érkező igények átlagos száma legyen kisebb a kiszolgáló átlagos kapacitásánál. Érezhető, hogy a lánc ilyenkor stabil, hiszen ekkor nem tud gyakran hosszúra nőni a sor.

Ha egy $\{X_n\}$ lánc stabil, akkor X_0'-vel fogunk jelölni egy olyan valószínűségi változót, amelynek eloszlása éppen a határeloszlás, ahogyan ezt korábban is tettük.

2.1.2. A sorhosszak várható értéke

Az előző fejezetben láttuk, hogy az evolúciós egyenlettel megadott Markov-lánc monoton típusú, ezért a stabilitási feltételek teljesülése esetén (az 1.14. tételben leírt értelemben) ergodikus is. Ott a sorhosszak átlagának a konvergenciáját azzal a feltétellel bizonyítottuk, hogy a stacionárius eloszláshoz tartozó várható érték véges. Kérdés, hogy a stacionárius eloszláshoz tartozó várható érték és általában egy k-adik momentum mikor véges. Általában megmutatható, hogy egy evolúciós egyenlettel adott stabil Markov-lánc stacionárius eloszlásához tartozó k-adik momentuma véges, amennyiben Y_1 $(k+1)$-edik momentuma véges.

Bináris $\{V_n\}$ esetén a stacionárius eloszláshoz tartozó első momentum, vagyis $\mathbf{E}(X_0')$ közvetlenül kiszámolható:

2.2. tétel. *Tegyük fel, hogy a stacionárius eloszláshoz tartozó második momentum véges és $\{V_n\}$ bináris. Ekkor*

$$\mathbf{E}(X_0') = \frac{\mathbf{E}(Y_1)(1 - 2\mathbf{E}(Y_1)) + \mathbf{E}\big({Y_1}^2\big)}{2(\mathbf{E}(V_1) - \mathbf{E}(Y_1))}. \tag{2.5}$$

BIZONYÍTÁS: Az evolúciós egyenletet V_n bináris volta miatt átírhatjuk a következő formába:

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})^+ + Y_{n+1} = X_n - V_{n+1}\mathrm{I}_{\{X_n \geq 1\}} + Y_{n+1}.$$

Tekintsük mindkét oldal várható értékét stacionárius állapotban. Ekkor

$$\mathbf{E}(X_{n+1}) = \mathbf{E}(X_n) - \mathbf{E}\big(V_{n+1}\mathrm{I}_{\{X_n \geq 1\}}\big) + \mathbf{E}(Y_{n+1}),$$

ahonnan a stacionaritás miatt

$$\mathbf{E}\big(V_1\mathrm{I}_{\{X_0 \geq 1\}}\big) = \mathbf{E}(Y_1). \tag{2.6}$$

Számítsuk ki most az evolúciós egyenlet négyzetének a várható értékét:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big(X_{n+1}{}^2\big) &= \mathbf{E}\big(X_n{}^2\big)+\mathbf{E}\big(V_{n+1}\mathrm{I}_{\{X_n\geq 1\}}\big)+\mathbf{E}\big(Y_{n+1}{}^2\big)+2\mathbf{E}(X_nY_{n+1})-\\ &\quad -2\mathbf{E}\big(X_nV_{n+1}\mathrm{I}_{\{X_n\geq 1\}}\big)-2\mathbf{E}\big(V_{n+1}\mathrm{I}_{\{X_n\geq 1\}}Y_{n+1}\big)=\\ &= \mathbf{E}\big(X_n{}^2\big)+\mathbf{E}\big(V_1\mathrm{I}_{\{X_0\geq 1\}}\big)+\mathbf{E}\big(Y_1{}^2\big)+2\mathbf{E}(X_0Y_1)-\\ &\quad -2\mathbf{E}(X_0V_1)-2\mathbf{E}\big(V_1\mathrm{I}_{\{X_0\geq 1\}}\big)\mathbf{E}(Y_1).\end{aligned}$$

Ismét a stacionaritást és a (2.6) egyenlőséget használva kapjuk, hogy

$$0=\mathbf{E}(Y_1)+\mathbf{E}\big(Y_1{}^2\big)+2\mathbf{E}(X_0)\mathbf{E}(Y_1)-2\mathbf{E}(X_0)\mathbf{E}(V_1)-2\mathbf{E}(Y_1)^2,$$

ahonnan az állítás következik. ∎

Mint már említettük, megmutatható, hogy $\mathbf{E}\big(Y_1{}^3\big)<\infty$ esetén $\mathbf{E}\Big((X_0')^2\Big)<\infty$.

2.1.3. Késleltetés

Az 1.9. szakasznak megfelelően jelölje D_n az első n időegységben beérkezett igények késleltetését és R_n az ezen idő alatt beérkezett igények számát. Ekkor az átlagos késleltetést a

$$\bar{D}=\lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{R_n}$$

sztochasztikus határérték definiálja, amennyiben létezik.

Egy közvetlen utat mutatunk a késleltetés kiszámítására abban a speciális esetben, amikor V_n konstans 1, azaz determinisztikus bináris kiszolgálás esetén. Az $(j+1)$-edik időszeletben Y_{j+1} igény érkezik, melyek közül az első késleltetése $(X_j-1)^+ +1$, a másodiké $(X_j-1)^+ +2$, …, az Y_{j+1}-ediké $(X_j-1)^+ +Y_{j+1}$, amennyiben $Y_{j+1}>0$, egyébként 0, tehát

$$\begin{aligned}D_{j+1} &= D_j+\mathrm{I}_{\{Y_{j+1}>0\}}\sum_{i=1}^{Y_{j+1}}\big((X_j-1)^+ +i\big)=\\ &= D_j+\mathrm{I}_{\{Y_{j+1}>0\}}Y_{j+1}(X_j-1)^+ +\mathrm{I}_{\{Y_{j+1}>0\}}\sum_{i=1}^{Y_{j+1}} i=\\ &= D_j+Y_{j+1}(X_j-1)^+ +Y_{j+1}(Y_{j+1}+1)/2.\end{aligned}$$

Most D_j-t kivonva és összegezve az egyenleteket 0-tól $n-1$-ig azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}D_n &= \sum_{j=1}^{n}\big(Y_j(X_{j-1}-1)^+ +Y_j(Y_j+1)/2\big)=\\ &= \sum_{j=1}^{n}Y_j(X_{j-1}-1)^+ +\sum_{j=1}^{n}Y_j(Y_j+1)/2,\end{aligned}$$

következésképp

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} D_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j (X_{j-1} - 1)^+ + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j (Y_j + 1)/2. \tag{2.7}$$

μ-t kiszámíthatjuk általános esetben is és az eredmény ugyanaz lesz, mint abban a speciális esetben, amit az egyszerűség kedvéért most tekintünk, nevezetesen, legyen $\mathcal{X}$ stacionárius. Adjuk hozzá és vonjuk le a (2.7) egyenlet jobb oldalából a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(Y_j)(X_{j-1} - 1)^+$ határértéket. Ekkor mivel Y_j-k azonos eloszlásúak

$$\begin{aligned} \mu \quad = \quad & \mathbf{E}(Y_1) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_{j-1} - 1)^+ + \\ & + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (Y_j - \mathbf{E}(Y_j))(X_{j-1} - 1)^+ + \\ & + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j (Y_j + 1)/2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Az első és a harmadik tag egy-egy átlagnak a határértéke, így a nagy számok gyenge törvénye alapján a sztochasztikus határérték az átlagolt valószínűségi változók közös várható értéke. A második határértékről megmutatjuk, hogy nulla, mégpedig úgy, hogy megmutatjuk, hogy négyzetes középben nullához tart a kifejezés, és abból az 1.6. lemma szerint következik, hogy sztochasztikusan is nullához tart.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}\big(Y_1{}^3\big) < \infty$. Ekkor $\mathbf{E}\big(X_0{}^2\big) < \infty$ és minden $j > i$ esetén

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\big((Y_i - \mathbf{E}(Y_i))(X_{i-1} - 1)^+ (Y_j - \mathbf{E}(Y_j))(X_{j-1} - 1)^+\big) = \\ = \quad & \mathbf{E}\big(\mathbf{E}\big((Y_i - \mathbf{E}(Y_i))(X_{i-1} - 1)^+ (Y_j - \mathbf{E}(Y_j))(X_{j-1} - 1)^+ \mid Y_i, X_{i-1}, X_{j-1}\big)\big) = \\ = \quad & \mathbf{E}\big((Y_i - \mathbf{E}(Y_i))(X_{i-1} - 1)^+ (X_{j-1} - 1)^+ \mathbf{E}((Y_j - \mathbf{E}(Y_j)) \mid Y_i, X_{i-1}, X_{j-1})\big) = \\ = \quad & 0 \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big((Y_j - \mathbf{E}(Y_j))^2 \big((X_{j-1} - 1)^+\big)^2\Big) \quad & = \quad \mathbf{E}\Big((Y_j - \mathbf{E}(Y_j))^2\Big) \cdot \mathbf{E}\Big(\big((X_{j-1} - 1)^+\big)^2\Big) \leq \\ & \leq \quad \mathbf{E}\Big((Y_j - \mathbf{E}(Y_j))^2\Big) \mathbf{E}\big(X_0{}^2\big), \end{aligned}$$

tehát

$$\mathbf{E}\Big(\big(\tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{j=1}^{n} (Y_j - \mathbf{E}(Y_j))(X_{j-1} - 1)^+\big)^2\Big) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\Big((Y_j-\mathbf{E}(Y_j))^2((X_{j-1}-1)^+)^2\Big)+\\
&\quad +\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\mathbf{E}\big((Y_i-\mathbf{E}(Y_i))(X_{i-1}-1)^+(Y_j-\mathbf{E}(Y_j))(X_{j-1}-1)^+\big)\leq\\
&\leq \frac{1}{n}\mathbf{E}\Big((Y_1-\mathbf{E}(Y_1))^2\Big)\mathbf{E}\big(X_0{}^2\big), \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

ez pedig tart 0-hoz, ha n tart ∞-hez. Ebből és a (2.8) kifejezésből következik, hogy

$$
\begin{aligned}
\mu &= \mathbf{E}(Y_1)\mathbf{E}\big((X_0-1)^+\big)+\mathbf{E}(Y_1(Y_1+1)/2)=\\
&= \mathbf{E}(Y_1)(\mathbf{E}(X_0)-\mathbf{P}(X_0\geq 1))+(\mathbf{E}\big(Y_1{}^2\big)+\mathbf{E}(Y_1))/2. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

A (2.6) és (2.10) összefüggésekből kapjuk, hogy

$$
\bar{D}=\frac{\mathbf{E}(Y_1)(\mathbf{E}(X_0)-\mathbf{E}(Y_1))+(\mathbf{E}\big(Y_1{}^2\big)+\mathbf{E}(Y_1))/2}{\mathbf{E}(Y_1)}.
$$

Ha még a sorhossz várható értékét, ((2.5) kifejezést) is behelyettesítjük $V_1\equiv 1$ esetén, akkor

$$
\begin{aligned}
\bar{D} &= \frac{\mathbf{E}\big(Y_1{}^2\big)-2\mathbf{E}(Y_1)^2+\mathbf{E}(Y_1)}{2\mathbf{E}(Y_1)(1-\mathbf{E}(Y_1))}=\\
&= \frac{\mathbf{E}(Y_1)(1-\mathbf{E}(Y_1))+\mathbf{E}\big(Y_1{}^2\big)-\mathbf{E}(Y_1)^2}{2\mathbf{E}(Y_1)(1-\mathbf{E}(Y_1))}=\\
&= \frac{1}{2}+\frac{\mathbf{E}\big(Y_1{}^2\big)-\mathbf{E}(Y_1)^2}{2\mathbf{E}(Y_1)(1-\mathbf{E}(Y_1))}=\\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sigma^2(Y_1)}{2\mathbf{E}(Y_1)(1-\mathbf{E}(Y_1))}. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Ellenőrizhető, hogy az 1.9. szakaszban említett

$$
\bar{D}=\frac{\mathbf{E}(X_0')}{\mathbf{E}(Y_1)}
$$

Little-formula is ezt az eredményt adja, tehát az evolúciós egyenlettel adott Markov-láncra teljesül a Little-formula.

2.2. Csomagkoncentrátorok

Gyakran felmerülő mérnöki probléma, hogy egy közös hírközlő csatornát kell megosztanunk egymással versengő felhasználók között. A felhasználók véletlenszerűen generálnak egy-egy adatcsomagot, amelyet továbbítani akarnak. A csatornát azonban egyidejűleg csak egyetlen felhasználó veheti igénybe. Ilyen például egy rádiócsatorna, amelyen minden adó ugyanazt a frekvenciát használja, vagy egy busz. A probléma két megoldási lehetősége a csomagkoncentrátor (aszinkron időmultiplexálás, statisztikus multiplexálás) illetve az időosztás alkalmazása.

A csomagkoncentrátor feladata, hogy a különböző igényforrásokból hozzá érkező csomagokat valamilyen algoritmus szerint továbbítsa a kommunikációs csatornába. Ez az algoritmus, mint majd látni fogjuk, kezelheti az igényforrásokat egyenrangúan vagy prioritásosan.

Tegyük fel, hogy M darab forrás akarja használni a csatornát szinkron üzemben, s ehhez időrésekre osztjuk azt. Egy időrésben legfeljebb egy csomag továbbítható. Arra, hogy az i-edik felhasználó a j-edik időrésben generál-e csomagot, bevezetjük az $Y_{i,j}$ valószínűségi változót, ahol

$$Y_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik felhasználó} \\ & \text{a } j\text{-edik résben generál csomagot,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

és legyen

$$\mathbf{P}(Y_{i,j} = 1) = p.$$

2.2.1. Egyszerű csomagkoncentrátor

Az egyszerű csomagkoncentrátor egy időegységben egy csomagot képes továbbítani, tehát $V_n \equiv 1$. Az előzőeknek megfelelően X_n jelöli az n-edik időszakasz végén a koncentrátorban lévő, kiszolgálásra váró csomagok számát és

$$Y_n = \sum_{i=1}^{M} Y_{i,n}.$$

az ebben az időszeletben érkezett új csomagok összes számát. Y_n eloszlása homogén rendszer esetén jellegzetesen jól modellezhető binomiális eloszlással, ha pedig a lehetséges küldő csomópontok száma nagy, Poisson-eloszlással. A csomagok számára (vagyis a sorhosszra) vonatkozó evolúciós egyenletünk a következő egyszerű alakot ölti:

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} - \mathrm{I}_{\{X_n \geq 1\}} \quad (n \geq 0).$$

Ha az $\{Y_n\}$ és X_0 valószínűségi változókra teljesülnek az előző szakasz elején ismertetett feltételek, akkor $\{X_n\}$ homogén Markov-lánc. Azt várjuk, hogy a sorhosszak sorozata akkor mutat valamiféle stabilitási tulajdonságot, ha az időegység alatt beérkező csomagok számának várható értéke kisebb egynél, azaz $\mathbf{E}(Y_1) < 1$, ami következik is a 2.1. tételből. Tehát a stabilitás feltétele

$$\mathbf{E}(Y_1) = M \cdot \mathbf{E}(Y_{i,j}) = Mp < 1.$$

A koncentrátor tervezőjét, üzemeltetőjét nyilván a sorhossz eloszlása illetve várható értéke érdekli, míg a felhasználókat a késleltetés. Az ezekre vonatkozó képleteket az előző szakaszban levezettük.

Az átlagos késleltetés (2.11) alapján

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\text{mux}} &= \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2(Y_1)}{2\mathbf{E}(Y_1)(1-\mathbf{E}(Y_1))} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{Mp(1-p)}{2Mp(1-Mp)} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1-p}{2(1-Mp)}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy Y_1 binomiális eloszlású M és p paraméterekkel, és ezért várható értéke Mp, szórásnégyzete pedig $Mp(1-p)$.

2.2.2. Időosztás

Az időosztás (TDM, time-division multiplexing) esetén minden felhasználóhoz hozzárendelünk egy-egy időrést, s az egymás utáni M darab időrés egy keretet alkot. Az i-edik felhasználó kizárólag a keret i-edik időrésében adhat. A fennmaradó időben ($M-1$ db rés) várakozik, ezalatt sorba állítja az igényeket a saját pufferében. Amennyiben egy felhasználónak nincs rendelkezésre álló csomagja, akkor a hozzá tartozó időrés üresen (kihasználatlanul) marad a keretben, akkor is, ha esetleg a többinek lenne adható csomagja.

Válasszuk most időegységnek a keretet, amely a rés hosszának M-szerese az előzőek alapján. Az i-edik felhasználó sorhossza az $(n+1)$-edik keret adásakor a következő evolúciós egyenlettel írható le:

$$\bar{X}_{i,n+1} = (\bar{X}_{i,n} - 1)^+ + \bar{Y}_{i,n+1}.$$

Az n-edik időegységben azok az igények érkeznek a felhasználók sorába, amelyeket az $(n-1)$-edik időegység alatt generáltak, s a saját pufferükben tároltak. Ezen igények számának meghatározásához összegezzük az $Y_{i,j}$ változókat ennek az időegységnek a réseire:

$$\bar{Y}_{i,n} = \sum_{j=(n-2)M+i+1}^{(n-1)M+i} Y_{i,j}.$$

$\bar{Y}$ eloszlása ugyanaz, mint Y eloszlása a csomagkoncentrátornál, így az átlagos késleltetésre is ugyanaz az eredmény adódik.

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\text{time}} &= \frac{1}{2} + \frac{Mp(1-p)}{2Mp(1-Mp)} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1-p}{2(1-Mp)}.\end{aligned}$$

Vegyük észre azonban, hogy míg a csomagkoncentrátor esetében időegység a *rés*, addig időosztás alkalmazásánál a *keret*! A kettő hányadosa M, azaz ha mindkét késleltetést időrésben mérjük, akkor

$$\bar{D}_{\text{time}} = M\bar{D}_{\text{mux}}$$

2.2.3. Megszakításos csomagkoncentrátor

Az egyszerű esethez képest itt a koncentrátor nem áll mindig rendelkezésre, például az adatcsomagok kiszolgálását beszéd- vagy videojelek csomagjainak kiszolgálása miatt felfüggesztik. Ebben az esetben azonban gyakran indokolt feltételezni, hogy a rendelkezésre állás nem emlékezetnélküli folyamat, amikor viszont a sorhosszak nem alkotnak Markov-láncot.

Tegyük fel, hogy valahány beszélő által (például egy konferencián) mondottakat akarjuk továbbítani. Az analóg beszédjelet mintavételezés és kvantálás után digitális csomagokba rendezve visszük át a hálózaton. A beszédcsomagokat nem késleltethetjük sokáig, ezért azt az eljárást követjük, hogy K időszeletet egy úgynevezett keretté fogunk össze és az egy keretben keletkezett beszédcsomagokat a következő keret elején továbbítjuk, a fennmaradó időszakaszokat használhatjuk adatcsomagok átvitelére. Ha az n-edik keretben $K - V_{n+1}$ beszédcsomag keletkezik, X_n jelöli az n-edik keret végén várakozó adatcsomagok számát és Y_n új adatcsomag érkezik az n-edik keretben, akkor az adatcsomagok számára vonatkozó evolúciós egyenletünk alakja

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})^+ + Y_{n+1} \quad (n \geq 0). \tag{2.12}$$

Általában $\{V_n\}$ nem emlékezetnélküli (független) folyamat, de jól modellezhető egy véges állapotú stacionárius Markov-lánccal. Ilyenkor $\{(X_n, V_n)\}$ egy kétdimenziós homogén Markov-láncot alkot (lásd a 2.8. feladatot).

Az $\{(X_n, V_n)\}$ Markov-lánc stabilitása levezethető a Foster-kritérium egy itt nem részletezett általánosításából. A stabilitás feltétele

$$\mathbf{E}(Y_1) < \mathbf{E}(V_1),$$

ami (lásd a 2.1. tételt) megegyezik az emlékezetnélküli $\{V_n\}$ esetén kapott képlettel.

2.2.4. Prioritásos csomagkoncentrátor

Itt a koncentrátornak M-féle különböző prioritású csomagot kell továbbítania. Ennek megfelelően M sor képződik (a kisebb index jelenti a nagyobb prioritást), és az i-edik sor eggyel csökkenhet, ha az első, második,..., $(i-1)$-edik sor üres. Vezessük be a következő jelöléseket:
$X_{i,n}$ az i prioritású csomagokból képzett sor hossza az n-edik időegység végén.
$Y_{i,n}$ az n-edik időegységben érkezett i prioritású üzenetcsomagok száma. Feltesszük, hogy minden rögzített i-re ez független és azonos eloszlású sorozat, másrészt különböző i-kre függetlenek egymástól és az $X_{i,0}$-któl is.

Ekkor a sorhosszak változását a következő egyenletek írják le:

$$X_{i,n+1} = X_{i,n} + Y_{i,n+1} - \mathrm{I}_{\{X_{i,n}\geq 1, \sum_{j=1}^{i-1} X_{j,n}=0\}} \quad (i = 1,2,\ldots,M; n \geq 0), \tag{2.13}$$

mivel a sorhossz az $(n+1)$-edik időszelet végén nyilvánvalóan nő az $(n+1)$-edik időszakaszban történt új beérkezések számával, és csökken eggyel, ha volt i prioritású elküldendő csomag az n-edik időegység végén (a sorhossz nagyobb volt nullánál) és nem volt $1,\ldots,i-1$ prioritású elküldendő csomag.

Az $\{X_{i,n}\}$ folyamatok tanulmányozása meglehetősen nehéz, így vezessük be az $S_{i,n}$ akkumulált sorhosszat és a $Z_{i,n}$ akkumulált forgalmat, összegezve az i-edik prioritásig a sorhosszakat illetve a beérkezések számát:

$$S_{i,n} = \sum_{j=1}^{i} X_{j,n} \quad (i = 1,2,\ldots,M), \tag{2.14}$$

$$Z_{i,n} = \sum_{j=1}^{i} Y_{j,n} \quad (i = 1,2,\ldots,M). \tag{2.15}$$

Ezekkel a mennyiségekkel a (2.13) egyenletekből következik, hogy

$$S_{i,n+1} = S_{i,n} + Z_{i,n+1} - \mathrm{I}_{\{S_{i,n}\geq 1\}} \quad (i = 1,2,\ldots,M).$$

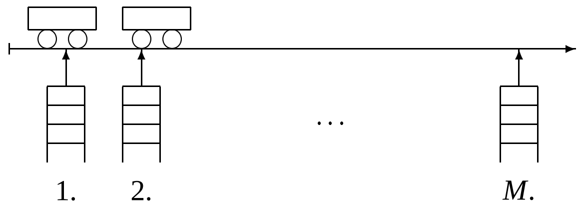
$\{S_{i,n}\}$ rögzített i-re homogén Markov-lánc (lásd a 2.9. feladatot).

Az $\{X_{i,n}\}$ sorokkal ellentétben az $\{S_{i,n}\}$ sorok egyenként kezelhetők, például stabilitásuk a 2.1. tétel alapján tisztázható, stacionárius eloszlásuk várható értékét pedig a 2.2. tétel szerint kiszámolhatjuk:

$$\mathbf{E}(S_{i,1}) = \frac{\mathbf{E}(Z_{i,1})(1-2\mathbf{E}(Z_{i,1})) + \mathbf{E}\left(Z_{i,1}{}^2\right)}{2(1-\mathbf{E}(Z_{i,1}))}. \tag{2.16}$$

Tekintetbe véve, hogy (2.14) miatt

$$\mathbf{E}(X_{i,1}) = \mathbf{E}(S_{i,1}) - \mathbf{E}(S_{i-1,1}),$$



2.1. ábra. Egyirányú busz

így ha $\mathbf{E}(Z_{i,1})$-et és $\mathbf{E}\left(Z_{i,1}{}^2\right)$-et meg tudjuk határozni, akkor $\mathbf{E}(X_{i,1})$-et is megkapjuk. A (2.15) definícióból és az $Y_{j,1}$-ek függetlenségéből

$$\mathbf{E}(Z_{i,1}) = \sum_{j=1}^{i} \mathbf{E}(Y_{j,1}),$$

továbbá

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(Z_{i,1}{}^2\right) &= \mathbf{E}\left(\left(\sum_{j=1}^{i} Y_{j,1}\right)^2\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{i} Y_{j,1}{}^2 + 2\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{l=k+1}^{i} Y_{k,1}Y_{l,1}\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{i} \mathbf{E}\left(Y_{j,1}{}^2\right) + 2\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{l=k+1}^{i} \mathbf{E}(Y_{k,1})\mathbf{E}(Y_{l,1}).
\end{aligned}$$

2.2.5. Egyirányú busz

Az előző szakasz illusztrálásaként tegyük fel, hogy a felhasználók egy buszra felfűzve sorakoznak. A kiszolgálás antidemokratikus jellegű, vagyis az adásra kész felhasználók közül mindig arra kerül a sor, amely legközelebb van a busz elejéhez, vagyis legkisebb a sorszáma (2.1. ábra). Tehát a prioritást a felhasználók sorszáma adja, egy felhasználó egyféle prioritású csomagot forgalmaz, a sorszámának megfelelőt. A sorok, az időosztáshoz hasonlóan, a felhasználók pufferében alakulnak ki.

A prioritásos csomagkoncentrátornál megismert módon ismét használjuk az S_i akkumulált sorhosszat és a Z_i akkumulált forgalmat. Ha $Y_{i,j}$ bináris, akkor (2.16) alapján

$$\mathbf{E}(S_{i,1}) = \frac{\mathbf{E}(Z_{i,1})(1-2\mathbf{E}(Z_{i,1})) + \mathbf{E}\left(Z_{i,1}{}^2\right)}{2(1-\mathbf{E}(Z_{i,1}))}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathbf{E}(Z_{i,1})}{2} + \frac{\sigma^2(Z_{i,1})}{2(1-\mathbf{E}(Z_{i,1}))} = \\
&= \frac{ip}{2} + \frac{ip(1-p)}{2(1-ip)},
\end{aligned}
$$

hiszen most Z_i binomiális eloszlású i és p paraméterekkel, tehát várható értéke ip, szórásnégyzete pedig $ip(1-p)$. Ebből az i-edik felhasználó sorhosszát kifejezve:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_{i,1}) &= \mathbf{E}(S_{i,1}) - \mathbf{E}(S_{i-1,1}) = \\
&= \frac{p}{2} + \frac{ip(1-p)}{2(1-ip)} - \frac{(i-1)p(1-p)}{2(1-(i-1)p)} = \\
&= \frac{p}{2} + \frac{p(1-p)}{2} \cdot \frac{i(1-(i-1)p)-(i-1)(1-ip)}{(1-ip)(1-(i-1)p)} = \\
&= \frac{p}{2} + \frac{p(1-p)}{2} \cdot \frac{1}{(1-ip)(1-(i-1)p)}.
\end{aligned}
$$

Ahonnan a késleltetésre:

$$
\begin{aligned}
\bar{D}_i &= \frac{\mathbf{E}(X_{i,1})}{\mathbf{E}(Y_{i,1})} = \\
&= \frac{\mathbf{E}(X_{i,1})}{p} = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1}{(1-ip)(1-(i-1)p)} \approx \\
&\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-ip)^2}.
\end{aligned}
$$

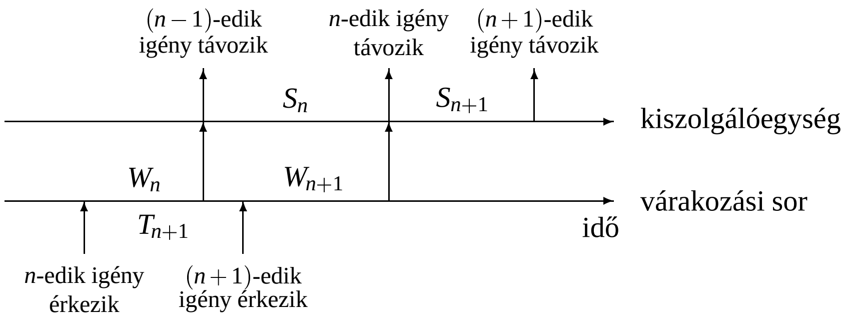
Legrosszabb helyzetben a busz végén lévő $i = M$-edik felhasználó van, az ő késleltetése:

$$
\begin{aligned}
\bar{D}_{\text{bus}} = \bar{D}_M &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-Mp)^2} \approx \\
&\approx \frac{D_{\text{mux}}}{1-\rho},
\end{aligned}
$$

ahol $\rho = Mp$ a kihasználtság.

A megismert csatornamegosztási módszerek átlagos késleltetése között a következő összefüggés áll fenn:

$$
\bar{D}_{\text{bus}} \approx \frac{\bar{D}_{\text{mux}}}{1-\rho} = \frac{\bar{D}_{\text{time}}}{M(1-\rho)}
$$



2.2. ábra. Tömegkiszolgálási rendszer idődiagramja

Például $\rho = 0.9$ kihasználtság esetén:

$$\bar{D}_{\text{bus}} \approx 10\bar{D}_{\text{mux}} = \frac{10}{M}\bar{D}_{\text{time}},$$

ami azt jelenti, hogy ha sok felhasználó van a rendszerben (M nagy), akkor az egyirányú busz módszere jobbnak bizonyul a késleltetés tekintetében az időosztásnál. Mindkettőnél jobb azonban a statisztikus multiplexálás, azaz az egyszerű csomagkoncentrátor módszere. Ennek hátránya azonban, hogy központi szervezést igényel, így nem mindig alkalmazható.

2.3. Evolúciós egyenlet a várakozási időre

Most feltesszük, hogy a rendszerben a kezdő (nulladik) időpillanatban nem tartózkodik egy igény sem, így az első beérkező igény kiszolgálása azonnal megkezdődik, várakozási ideje (W_1) nulla. Vezessük be a következő jelöléseket:
W_n az n-edik igény várakozási ideje;
S_n az n-edik igény kiszolgálási ideje;
T_n az $n-1$-edik és az n-edik igény érkezése között eltelt idő.
A bevezetett mennyiségekről feltesszük, hogy
$\{S_n\}$ független és azonos eloszlású sorozat;
$\{T_n\}$ is független és azonos eloszlású;
$\{T_n\}$ független $\{S_n\}$-től.

Ekkor a várakozási időt a következő evolúciós egyenlet írja le:

$$W_{n+1} = (W_n - T_{n+1} + S_n)^+, \tag{2.17}$$

hiszen az n-edik igény $W_n + S_n$ időt tölt el a rendszerben (2.2. ábra). Ha $T_{n+1} > W_n + S_n$, akkor a rendszer üres az $(n+1)$-edik igény érkezésekor, és így nem kell várakoznia, $W_{n+1} = 0$. Ha pedig $T_{n+1} \leq W_n + S_n$, akkor az $(n+1)$-edik igény érkezésekor, az n-edik még a rendszerben tartózkodik, de már T_{n+1} idő eltelt érkezése óta, tehát a rendszerben még $W_n + S_n - T_{n+1}$ időt tölt el, ennyit kell az $(n+1)$-edik igénynek várakoznia. Azaz az $(n+1)$-edik igény várakozási idejét az n-edik igény várakozásából még hátralévő idő $(W_n - T_{n+1})$ és az n-edik igény kiszolgálási idejének összege adja, ha még nem fejeződött be az n-edik igény kiszolgálása. A $\{W_n\}$ folyamat homogén Markov-láncot alkot az evolúciós egyenlettel adott sorhosszhoz hasonlóan. A stabilitás elégséges feltétele a 2.1. tétel alapján

$$0 < \mathbf{E}(T_1 - S_1) < \infty,$$

vagyis

$$\mathbf{E}(S_1) < \mathbf{E}(T_1) < \infty. \tag{2.18}$$

Illetve az irreducibilitást és aperiodikusságot biztosítandó:
$p_{ij} = \mathbf{P}(W_{n+1} = j \mid W_n = i) > 0$, ha vagy $i = 0$ és $j = 0, 1$ vagy $i > 0$ és $j = i-1$, $i, i+1$.

A 2.4. szakaszban részletesen foglalkozunk a zajos visszacsatolásos csatornán történő üzenetküldés néhány lehetséges megoldásával, melyek visszavezethetőek erre a modellre.

Egy tömegkiszolgálási rendszerre különböző feltételek mellett lesz a sorhosszak illetve a várakozási idők által alkotott folyamat Markov-lánc, így általában ha az egyik Markov-lánc, akkor a másik tipikusan nem az. A következő speciális esetben mindkettő Markov-lánc lesz, sőt mind a sorhossz, mind a várakozási idő határeloszlását ki tudjuk számolni. Tudjuk, hogy stabil Markov-lánc esetén a stacionárius eloszlás (azaz a határeloszlás) kiszámítható az 1.8. tétel alapján, vagyis az (1.21) egyenlet megoldásával:

$$P = P\mathbf{\Pi}.$$

Ez általában nem könnyű, mivel végtelen sok darab összesen végtelen sok ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletünk van, de ha a (2.1) evolúciós egyenletben mind V_n, mind Y_n bináris, akkor a fenti egyenletrendszer egyszerűen megoldható, és a megoldás a nemnegatív egészekre koncentrált, közelítőleg geometriai eloszlás. Legyen V_n és Y_n bináris úgy, hogy

$$\mathbf{P}(V_n = 1) = p \text{ és } \mathbf{P}(Y_n = 1) = q.$$

Ez azt jelenti, hogy az egymást követő lehetséges kiszolgálási időpontok távolsága (ha a sorban mindig van igény), azaz az S_n kiszolgálási idő p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó, míg az egymást követő igények érkezési időpontjainak a T_n távolsága q paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó. Ebben az esetben az igények várakozási ideje felírható a (2.17) evolúciós egyenlettel.

Mind a sorhosszra, mind a várakozási időre vonatkozó lánc stabil, ha $0 < q < p < 1$ (lásd a 2.1. feladatot).

2.3.1. A sorhossz stacionárius eloszlásának kiszámítása

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} a &= (1-q)p, \\ b &= (1-p)q, \\ r &= 1-a-b, \\ \gamma &= \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Ekkor az átmenetvalószínűség-mátrix:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 & \dots \\ a & r & b & 0 & \dots \\ 0 & a & r & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszerből az első egyenlet

$$p_0 = p_0(1-q) + p_1 a,$$

ahonnan p_1 a p_0 segítségével kifejezhető:

$$p_1 = \frac{p_0}{1-p}\gamma.$$

A második egyenlet

$$p_1 = p_0 q + p_1 r + p_2 a,$$

ahonnan

$$p_2 = \frac{p_0}{1-p}\gamma^2.$$

Innen már sejthető, hogy

$$p_i = \frac{p_0}{1-p}\gamma^i \quad (i \geq 1),$$

ami teljes indukcióval bizonyítható, ha figyelembe vesszük, hogy $i \geq 2$ esetén az $(i+1)$-edik egyenlet

$$p_i = p_{i-1} b + p_i r + p_{i+1} a. \tag{2.19}$$

p_0 értékét megkapjuk, ha felhasználjuk, hogy

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1,$$

azaz

$$p_0 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_0}{1-p} \gamma^i = 1,$$

ahonnan

$$p_0 = 1 - \frac{q}{p}.$$

Kiszolgálási feladatokban igen gyakori az az eset, amikor a sor hossza korlátozott, nem lehet nagyobb, mint egy N természetes szám úgy, hogy amennyiben egy új igény akkor érkezik, amikor a sorhossz már N, akkor ez az igény elveszik, ezért ezt a kiszolgálási problémát veszteséges kiszolgálásnak nevezzük. A stacionárius eloszlás ebben az esetben is kiszámítható az előbb alkalmazott trükkökkel, ha meggondoljuk, hogy az átmenetvalószínűség-mátrix:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & r & b & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a & r & b & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a & r & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a & 1-a \end{pmatrix}.$$

Nyilván a határeloszlás utolsó tagja a legérdekesebb, hiszen ez a sor telítettségének, vagyis a veszteségnek a valószínűsége.

2.3.2. A generátorfüggvény

Az $a_0, a_1, a_2, \dots$ valós számsorozat generátorfüggvénye (vagy z-transzformáltja)

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

amennyiben ez a sor konvergens valamely intervallumban. Ha az a_k sorozat korlátos, akkor $A(z)$ felülről becsülhető egy geometriai sorral, amely konvergens minden $|z| < 1$-re. Ez teljesül például akkor, ha az a_k számok egy diszkrét eloszlás tagjai, hiszen ekkor $a_k \leq 1$. Tehát a nemnegatív egészeken értelmezett minden

$\{p_0, p_1, \ldots\}$ eloszlásnak létezik $P(z)$ generátorfüggvénye. Sőt eloszlások esetében a generátorfüggvény nem más, mint egy várható érték:

$$P(z) = \mathbf{E}\left(z^X\right),$$

ha $\{p_0, p_1, \ldots\}$ az X valószínűségi változó eloszlása.

A generátorfüggvény számos fontos tulajdonsággal rendelkezik, ezek közül itt csak néhányat emelünk ki.

A definíció alapján világos, hogy ha a sorozatot eggyel eltoljuk balra, akkor a generátorfüggvény z-vel szorzódik, azaz az $\{a_{k-1}\}$ sorozat generátorfüggvénye $zA(z)$. Hasonlóan, az $\{a_{k-i}\}$ sorozat generátorfüggvénye $z^i A(z)$, illetve az $\{a_{k+1}\}$ sorozat generátorfüggvénye $\frac{1}{z}[A(z) - a_0]$, hiszen itt az első szám eltűnik a sorozatból a transzformált számolásakor.

Szintén a definícióból következik, hogy tetszőleges α konstansra $\{\alpha a_k\}$ generátorfüggvénye $\alpha A(z)$.

Most tegyük fel, hogy két sorozatunk van, a_k és b_k, generátorfüggvényeiket jelölje $A(z)$ illetve $B(z)$. Megint csak világos, hogy $a_k + b_k$ generátorfüggvénye $A(z) + B(z)$.

A két sorozat $c = a * b$ konvolúcióján a

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

sorozatot értjük. Emlékezzünk vissza, hogy két valószínűségi változó összegének eloszlását a két eloszlás konvolúciójaként kaphatjuk meg. Nézzük meg, hogy miként kaphatjuk meg c_k generátorfüggvényét.

$$\begin{aligned}
C(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} z^k = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} a_i b_{k-i} z^k = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \sum_{k=i}^{\infty} b_{k-i} z^{k-i} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l \right) = \\
&= A(z)B(z).
\end{aligned}$$

Tehát az eredeti sorozatok konvolúciójának képzése helyett az eredmény generátorfüggvénye egy egyszerű szorzással adódik.

A generátorfüggvényből az eredeti sorozatot úgy kaphatjuk vissza, ha az $A(z)$ függvényt sorfejtjük, hiszen a_k pont z^k együtthatója a hatványsorban:

$$a_k = \frac{1}{k!} A^{(k)}(z)|_{z=0},$$

ahol $A^{(k)}(z)$ az $A(z)$ függvény z szerinti k-adik deriváltja.

Most nézzük néhány nevezetes eloszlás generátorfüggvényét.

BERNOULLI- (INDIKÁTOR-) ELOSZLÁS

Ebben az eloszlásban csak a 0-nak és az 1-nek van nemnulla valószínűsége. Legyen az 1 valószínűsége p. Ekkor a generátorfüggvény a definíciót használva:

$$P(z) = (1-p)z^0 + pz^1 = 1-p+pz.$$

BINOMIÁLIS ELOSZLÁS

Az (n,p) paramétrű binomiális eloszlás k-adik tagja $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, ha $0 \le k \le n$. Az eloszlás generátorfüggvénye

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k} = (1-p+pz)^n. \end{aligned}$$

Erre az eredményre úgy is eljuthatunk, ha meggondoljuk, hogy a binomiális eloszlás n darab indikátor valószínűségi változó összegének az eloszlása, vagyis n darab indikátor eloszlás konvolúciójaként adódik. Fentebb levezettük, hogy a konvolúcióképzés a generátorfüggvények szorzását jelenti, így

$$(1-p+pz)(1-p+pz)\cdots(1-p+pz) = (1-p+pz)^n$$

adódik.

POISSON-ELOSZLÁS

A λ paramétrű Poisson-eloszlás k-adik tagja $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, ha $k \ge 0$. Generátorfüggvénye

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Mivel $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!}$ egy hatványsor, méghozzá $e^{\lambda z}$ hatványsora, így a generátorfüggvény

$$P(z) = e^{\lambda z} e^{-\lambda} = e^{\lambda(z-1)}. \tag{2.20}$$

GEOMETRIAI ELOSZLÁS

A p paramétrű geometriai eloszlás k-adik tagja $p_k = (1-p)^{k-1}p$, ha $k \ge 1$. Generátorfüggvénye

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p z^k = pz \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)z)^{k-1} = \\ &= pz \sum_{l=0}^{\infty} ((1-p)z)^l = pz \frac{1}{1-(1-p)z} = \frac{pz}{1-(1-p)z}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

A generátorfüggvény segítségével is megkaphatjuk az előző szakaszban kiszámolt határeloszlást az evolúciós egyenlettel adott sorhosszra. A (2.19) egyenlet egy differenciaegyenlet, megoldásán keresztül szemléltetjük, hogy miként lehet a generátorfüggvények módszerével differenciaegyenletet megoldani. Tekintsük a (2.19) egyenlet mindkét oldalának a generátorfüggvényét, azaz szorozzuk meg az egyenletet z^i-vel minden i-re, majd összegezzük az egyenleteket $i = 2$-től végtelenig:

$$\sum_{i=2}^{\infty} p_i z^i = b \sum_{i=2}^{\infty} p_{i-1} z^i + r \sum_{i=2}^{\infty} p_i z^i + a \sum_{i=2}^{\infty} p_{i+1} z^i.$$

Emeljük ki z hatványait a szummajelek alól, úgy hogy a maradék hatvány megegyezzen a indexével:

$$\sum_{i=2}^{\infty} p_i z^i = bz \sum_{i=2}^{\infty} p_{i-1} z^{i-1} + r \sum_{i=2}^{\infty} p_i z^i + a \frac{1}{z} \sum_{i=2}^{\infty} p_{i+1} z^{i+1}.$$

Felhasználva a generátorfüggvények fenti tulajdonságait az egyenletünk

$$\begin{aligned} &P(z) - p_0 - p_1 z = \\ &\quad = bz\left(P(z) - p_0\right) + r\left(P(z) - p_0 - p_1 z\right) + a\frac{1}{z}\left(P(z) - p_0 - p_1 z - p_2 z^2\right). \end{aligned}$$

Átrendezve és felhasználva, hogy $r = 1 - a - b$, illetve, hogy (2.19) alapján $p_1 = \frac{q}{a} p_0$, $p_2 = \frac{p_0}{1-p}\left(\frac{b}{a}\right)^2 = q\frac{b}{a^2} p_0$

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{\left(-bp_0 + (1-r)p_1 - ap_2\right)z^2 + \left((1-r)p_0 - ap_1\right)z - ap_0}{-bz^2 + (1-r)z - a} = \\ &= p_0 + \frac{\left((a+b)p_1 - ap_2\right)z^2 - ap_1 z}{-bz^2 + (a+b)z - a} = \\ &= p_0 + \frac{\left((a+b)\frac{q}{a}p_0 - aq\frac{b}{a^2}p_0\right)z^2 - qp_0 z}{-bz^2 + (a+b)z - a} = \\ &= p_0 + \frac{qp_0 z(z-1)}{-b\left(z - \frac{a}{b}\right)(z-1)} = \\ &= p_0 + \frac{\frac{b}{(1-p)a} p_0 z}{-\frac{b}{a}z + 1} = \\ &= p_0 + \frac{p_0}{1-p} \cdot \frac{\frac{b}{a}z}{1 - \frac{b}{a}z} = \\ &= p_0 + \frac{p_0}{1-p} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^i z^i, \end{aligned}$$

ahonnan a már ismert

$$p_i = \frac{p_0}{1-p}\left(\frac{b}{a}\right)^i = \frac{p_0}{1-p}\gamma^i$$

képlet adódik.

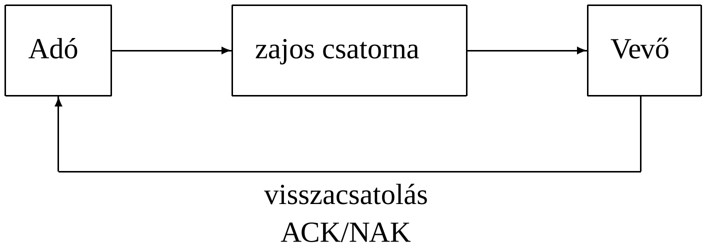
2.3.3. A várakozási idő stacionárius eloszlásának kiszámítása

Ha egy igény az n-edik időpontban érkezik, akkor X_n igényt talál a rendszerben, így kiszolgálásáig végig kell várnia ennek az X_n igénynek a kiszolgálását. Két kiszolgálás között eltelt idő, vagyis a kiszolgálási idő esetünkben p paraméterű geometriai eloszlású. A sorban első igény kiszolgálása már megkezdődött abban az értelemben, hogy kiszolgálási idejéből már eltelt valamennyi, de a geometriai eloszlás örökifjú tulajdonsága (lásd a 2.7. feladatot) miatt egy kiszolgálásból hátralévő idő is geometriai eloszlású, ha a kiszolgálási idő az. Így a W várakozási idő X_n darab független azonos p paramétrű geometriai eloszlású valószínűségi változó összege. Ezért a generátorfüggvény tulajdonságai miatt, a várakozási idő generátorfüggvénye a geometriai eloszlás generátorfüggvényének megfelelő hatványaként írható. Jelölje $W(z)$ a várakozási idő határeloszlásának generátorfüggvényét. A p paraméterű geometriai eloszlás generátorfüggvénye

$$\frac{pz}{1-(1-p)z}$$

(lásd a (2.21) levezetést), így tehát

$$\begin{aligned}
W(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} W(z \mid X_n = j)\mathbf{P}(X_n = j) = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^j \frac{p_0}{1-p}\left(\frac{b}{a}\right)^j + p_0 \\
&= \frac{p_0}{1-p}\frac{b}{a}\frac{pz}{1-(1-p)z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\frac{b}{a}\right)^k + p_0 \\
&= \frac{p_0}{1-p}\frac{b}{a}\frac{pz}{1-(1-p)z}\frac{a(1-(1-p)z)}{a(1-(1-p)z)-bpz} + p_0 \\
&= \frac{p_0}{1-p}\frac{bpz}{a(1-(1-p)z)-bpz} + p_0 \\
&= p_0\frac{qz}{1-q-(1-p)z} + p_0 \\
&= \frac{q}{p}\frac{\frac{p-q}{1-q}z}{1-\left(1-\frac{p-q}{1-q}\right)z} + 1 - \frac{q}{p},
\end{aligned}$$



2.3. ábra. Az adatkapcsolati kommunikáció modellje

ahol felhasználtuk, hogy $a = p(1-q)$, $b = q(1-p)$ és $p_0 = 1 - \frac{q}{p}$. Az első tag az $\{1, 0, 0, \ldots\}$ eloszlás generátorfüggvényének $1 - \frac{q}{p}$-szerese, a második pedig a $\frac{p-q}{1-q}$ paramétrű geometriai eloszlás generátorfüggvényének $\frac{q}{p}$-szerese. Tehát a várakozási idő $\frac{q}{p}$ valószínűséggel $\frac{p-q}{1-q}$ paramétrű geometriai eloszlású, és $p_0 = 1 - \frac{q}{p}$ valószínűséggel nulla.

2.4. Csomagküldés zajos csatornán

A következőkben a hálózatok adatkapcsolati rétegének (data link layer) néhány lehetséges protokollját mutatjuk be és vizsgáljuk a teljesítőképesség szempontjából. Az adatkapcsolati réteg feladata az (adat)csomagok sorrendhelyes és hiba nélküli továbbítása a hálózat két szomszédos csomópontja között. A protokollokat csak a tényleges adatátvitel közben fogjuk vizsgálni, de megjegyezzük, hogy a gyakorlati megvalósítások természetesen rendelkeznek kapcsolatlétesítési és -lebontási fázissal is. Az adatátviteli csatorna zajos, de rendelkezésünkre áll egy visszacsatolás a vevőtől az adó felé (2.3. ábra), tehát a vevő minden időegység végén informálja az adót arról, hogy a csomagküldés sikeres volt-e az illető időszakaszban. Hibázás esetén az érkezett csomagot eldobjuk és azt a következő időszeletben újra elküldjük.

A csomópontok közötti kommunikáció aszinkron, így a szinkronizáláshoz szükséges információt maguknak a csomagoknak kell tartalmazniuk. Ez egy szinkronizáló mező segítségével történik. A csomagok sérülését is észlelnünk kell a vevő oldalon, erre szolgál a hibajelző kódolás (többnyire CRC ellenőrző összeg generálásával történik). Hibajavító kódolást a túlzottan nagy erőforrás- és redundanciakarakter-igény miatt az adatkapcsolati rétegben nem szokás alkalmazni. Helyette az *ARQ* (Automatic Repeat reQuest, automatikus ismétléskérés) módszerét használják, azaz hibajelzés esetén a csomagot újraküldik. A csomagok sorrendhelyességét pedig egy sorszám mező alkalmazásával biztosíthatjuk leg-

szinkronizáló mező	cím mező	sorszám mező	adatcsomag	hibajelző mező

2.4. ábra. A csomag egy lehetséges felépítése

egyszerűbben. Az adatcsomag és az előbb említett vezérlő mezők együttesét csomagnak, néha keretnek (frame) nevezzük (2.4. ábra).

Számos ARQ technika lehetséges: Minden egyes helyesen vett csomagot nyugtázhatunk egy speciális nyugta csomaggal (ack), vagy a nyugtát beágyazhatjuk az ellentétes irányban továbbított csomagok vezérlő mezőibe (amennyiben van forgalom a másik irányban). Bevezethetünk negatív nyugtát (nak) az átviteli hiba jelzésére. A deadlock helyzetek elkerülésére időkorlátokat is fel kell állítanunk: ha az adó nem kap sem pozitív, sem negatív nyugtát egy előre meghatározott időkorláton belül (például azért, mert a vevő szinkronhiba miatt már magát a csomagot sem észleli), akkor megismétli az adott csomagot. Ehhez az szükséges, hogy amíg a vevő nem nyugtáz egy elküldött csomagot, addig azt az adó az adási pufferében tárolja.

Ha X_n jelöli az n-edik időegység végén az adóban sorbanálló csomagok számát és Y_n az ezen időszeletben érkező új csomagok számát, akkor ismét a már jól ismert evolúciós egyenletet kapjuk:

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})^+ + Y_{n+1},$$

ahol most

$$V_n = \begin{cases} 1 & \text{ACK (sikeres)} \\ 0 & \text{NAK (sikertelen)} \end{cases}$$

a sikeres illetve sikertelen csomagtovábbításnak megfelelően. Azaz az egymás utáni csomagok, egymástól függetlenül $p = 1 - \mathbf{E}(V_1) = 1 - \mathbf{P}(V_1 = 1)$ valószínűséggel hibásodnak meg, így $\{V_n\}$ független sorozat. Ha még $\{Y_n\}$ is független és azonos eloszlású, akkor $\{X_n\}$ homogén Markov-lánc. Az egyes csomagok várakozási idejére is felírhatjuk az ismerős rekurziót

$$W_{n+1} = (W_n - T_{n+1} + S_n)^+ .$$

A kiszolgálási idő a csomag sikeres továbbításáig eltelt idő, ami a független és azonos valószínűségű meghibásodások miatt független és azonos eloszlású sorozat lesz. Független és azonos eloszlású lesz $\{T_n\}$ is, ha $\{Y_n\}$ bináris, így $\{W_n\}$ is homogén Markov-lánc.

A tárgyalásra kerülő három legelterjedtebb protokoll a pozitív és negatív nyugták kezelésének módjában különbözik.

2.4.1. Késleltetésmentes nyugta

Tekintsünk el első megközelítésben a jelterjedési időtől. A 2.1. tétel szerint a stabilitás feltétele ebben a késleltetésmentes esetben

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y_1) &< \mathbf{E}(V_1) = \\ &= \mathbf{P}(V=1) = \\ &= 1-\mathbf{P}(\text{sikertelen küldés}) = \\ &= 1-p.\end{aligned}$$

Információelméletben járatosak kedvéért megemlítjük, hogy egy $p = 1-\mathbf{E}(V_1) = 1-\mathbf{P}(V_1=1)$ valószínűséggel törlő emlékezetnélküli törléses csatornáról van szó, ahol a csatornakarakter egy csomag. Az ilyen csatorna kapacitása $(1-p) = \mathbf{E}(V_1)$ csomag/csatornahasználat. Tehát a stabilitás feltétele az, hogy az átlagos forrássebesség kisebb legyen, mint a csatornakapacitás.

Határozzuk meg az optimális adatcsomagméretet, amely maximális átvitelt tesz lehetővé adott csatorna esetén! Emlékezzünk vissza, hogy egy csomag vezérlőmezőkből és a tényleges adatot szállító adatcsomagból áll. Ha az adatcsomag kicsi, akkor a rendszer kevésbé hatékonyan működik, hiszen inkább vezérlőinformációt szállít, mintsem adatot. Másrészt, minél nagyobb az adatcsomag, annál nagyobb valószínűséggel jut el egy csomag hibásan a vevőhöz, ami több újraküldést tesz szükségessé, s ez nyilvánvalóan csökkenti az időegység alatt átvihető adatmennyiséget. Létezik azonban egy optimális adatcsomagméret, amely maximalizálja az átvitelt.

Tételezzük fel, hogy az átvinni kívánt bitek egymástól függetlenül hibásodnak meg, p_b bithiba-valószínűséggel. Legyen az adatcsomag hossza N_d bit, a vezérlőmezők hossza N_h bit, s így a teljes csomag hossza $N = N_\mathrm{h} + N_\mathrm{d}$ bit. Ekkor egy csomag hibás vételének valószínűsége (legalább egy bithiba van a csomagban):

$$p = 1-(1-p_\mathrm{b})^N. \tag{2.22}$$

A stabilitási határ csomagban mérve $1-p$, és $\frac{N_\mathrm{d}}{N_\mathrm{h}+N_\mathrm{d}}$ a hasznos bitek aránya egy csomagon belül, ezért a kihasználtságra a stabilitási határ

$$(1-p)\frac{N_\mathrm{d}}{N_\mathrm{h}+N_\mathrm{d}},$$

amely a (2.22) képlet felhasználásával

$$(1-p_\mathrm{b})^{N_\mathrm{h}+N_\mathrm{d}}\,\frac{N_\mathrm{d}}{N_\mathrm{h}+N_\mathrm{d}}.$$

A maximalizáláshoz legyen a kifejezés N_d szerinti deriváltja 0:

$$\frac{(1-p_\mathrm{b})^{N_\mathrm{h}+N_\mathrm{d}}\left(\frac{N_\mathrm{h}}{N_\mathrm{h}+N_\mathrm{d}}+N_\mathrm{d}\ln(1-p_\mathrm{b})\right)}{N_\mathrm{h}+N_\mathrm{d}}=0.$$

A tört értéke akkor lehet 0, ha a számláló második tényezője 0, vagyis az

$$\frac{N_\mathrm{h}}{N_\mathrm{h}+N_\mathrm{d}}+N_\mathrm{d}\ln(1-p_\mathrm{b})=0$$

egyenletet kell megoldanunk, amelyet átalakítva

$$N_\mathrm{d}^2+N_\mathrm{h}N_\mathrm{d}+\frac{N_\mathrm{h}}{\ln(1-p_\mathrm{b})}=0$$

adódik. Az egyenlet pozitív gyökeként az

$$N_\mathrm{d}^\mathrm{opt}=\frac{N_\mathrm{h}}{2}\left(\sqrt{1-\frac{4}{N_\mathrm{h}\ln(1-p_\mathrm{b})}}-1\right) \tag{2.23}$$

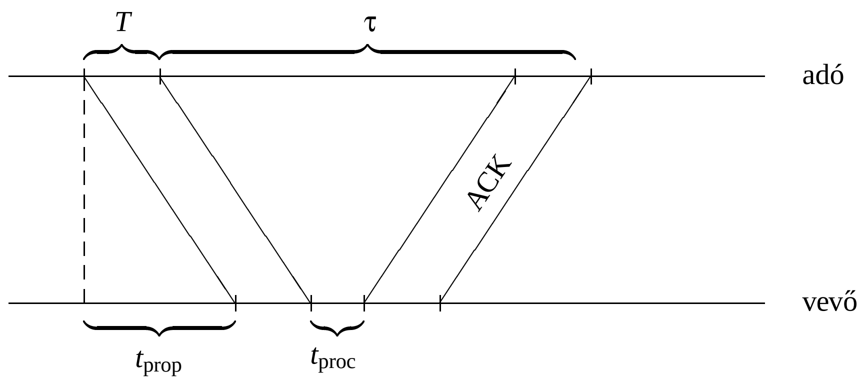
optimális adatcsomagméretet kapjuk. (A második derivált itt negatív, így valóban a maximumhelyet határoztuk meg.) Kis p_b-re alkalmazhatjuk a $-\ln(1-p_\mathrm{b})\approx p_\mathrm{b}$ közelítést, tehát ekkor

$$\begin{aligned} N_\mathrm{d}^\mathrm{opt} &\approx \frac{N_\mathrm{h}}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{N_\mathrm{h}p_\mathrm{b}}}-1\right)\approx \\ &\approx \frac{N_\mathrm{h}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{N_\mathrm{h}p_\mathrm{b}}}-1\right)\approx \\ &\approx \sqrt{\frac{N_\mathrm{h}}{p_\mathrm{b}}} \end{aligned}$$

Nézzünk egy számpéldát az elmondottak illusztrálására! Legyen a csomag fejrésze $N_\mathrm{h}=48$ bit hosszú, a csatorna hibavalószínűsége pedig $p_\mathrm{b}=10^{-5}$ (ez a földi telefonos adatátvitelben jellemző érték). Ekkor (2.23) felhasználásával $N_\mathrm{d}^\mathrm{opt}=2167$ bites optimális adatcsomagméretet kapunk. Ha a csatorna hibavalószínűségét századára, vagyis 10^{-7}-re sikerül leszorítanunk, akkor az optimális adatcsomagméret tízszeresére növekszik (21885 bit).

2.4.2. Stop-and-Wait protokoll

Ebben az esetben egyszerre csak egyetlen csomagot küldhet el az adó, majd meg kell várnia ennek nyugtáját (2.5. ábra). Amennyiben negatív nyugta érkezik vissza



2.5. ábra. A Stop-and-Wait protokoll

(ha használja a protokoll ezt a lehetőséget) vagy lejár a várakozás időkorlátja, a csomagot újraadja. Az adó kizárólag pozitív nyugta esetén távolítja el a csomagot az adási pufferéből, s lép tovább a következő keretre.

Bár még sikeres továbbítás esetén is sokat kell várakozni, azonban ez egy megfelelő protokoll lehet fél-duplex átvitel esetén, amikor a két oldal felváltva ad. Ugyanakkor nyilvánvalóan csökkentett adatátvitelt tesz csak lehetővé full-duplex esetben (független átviteli igények mindkét irányban), különösen akkor, ha a csatorna jelterjedési ideje lényegesen nagyobb, mint a csomag adási ideje. Ha a jelterjedési idő elhanyagolható az összeköttetés rövidsége vagy a viszonylag alacsony adási sebesség miatt, akkor a Stop-and-Wait protokoll nem okoz lényegesen rosszabb átvitelt, mint azt rövidesen látni fogjuk.

A jelterjedési és feldolgozási időtől azonban általában nem tekinthetünk el. Legyen T egy csomag adásához szükséges idő, t_{prop} a jelterjedési idő, t_{proc} pedig az az idő, amely a vevőnek szükséges a csomag feldolgozásához és a nyugta visszaküldéséhez. Mivel új csomagot csak akkor küldhet az adó, amikor az előző csomag sikeres továbbításáról visszaérkezett a nyugta a vevőtől, ezért az adó időzítést állít be

$$\tau = 2t_{\text{prop}} + T + t_{\text{proc}}$$

hosszra: ha ez alatt nem jön nyugta a csomag sikeres továbbításáról a vevőtől, akkor ezt átviteli hibának tekinti. A minimális idő, amelynek két sikeres csomag között el kell telnie: $T + \tau$.

Vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz stabil a csomagok várakozási ideje által alkotott Markov-lánc! Tegyük fel, hogy τ a T egész számú többszöröse. Ekkor a kiszolgálási idő t_{trans} is T egész számú többszöröse. Ha T-t tekintjük egy időegységnek, akkor az S_1 kiszolgálási idő $\frac{t_{\text{trans}}}{T}$. Tegyük fel, hogy Y_i bináris, ekkor két szomszédos érkezés T_1 távolsága $\mathbf{E}(Y_1)$ paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó, ezért a szomszédos érkezések távolságának várható értéke $\frac{1}{\mathbf{E}(Y_1)}$. Így a stabilitás feltétele (2.18) miatt

$$\frac{\mathbf{E}(t_{\text{trans}})}{T} = \mathbf{E}(S_1) < \mathbf{E}(T_1) = \frac{1}{\mathbf{E}(Y_1)},$$

azaz

$$\mathbf{E}(Y_1) < \frac{T}{\mathbf{E}(t_{\text{trans}})}.$$

Az időegység alatt sikeresen átvihető adatmennyiség meghatározásához (felső becsléséhez) tegyük fel, hogy mindössze egyetlen adó és egyetlen vevő vesz részt a kommunikációban, valamint nem alkalmazunk negatív nyugtát. Ekkor maximálisan 1 csomag vihető át $T+\tau$ idő alatt (abban az esetben, ha mindig sikeres az átvitel, azaz pozitív nyugta érkezik vissza).

Legyen egy csomag hibás átvitelének valószínűsége p. Tegyük fel, hogy egy csomagot tetszőlegesen sokszor újraküldhetünk. A gyakorlatban ez általában nem igaz, ugyanis ha a sikertelen átviteli próbálkozások száma elér egy előre megadott értéket, akkor az összeköttetést hibásnak nyilvánítják, és a felsőbb rétegek feladata a probléma megoldása. A visszacsatolás esetleges hibáját elhanyagoljuk, tehát egy leadott nyugta mindig rendben visszaér az adóhoz. Ha az adás az i-edik kísérletre sikeres, a továbbítási idő $i(T+\tau)$, melynek eloszlása $(1-p)$ paraméterű geometriai eloszlás. Így egy csomag sikeres átvitelének átlagos ideje:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t_{\text{trans}}) &= \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1}(1-p)i(T+\tau) = \\ &= (T+\tau)\cdot\sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1}(1-p),\end{aligned}$$

ahonnan a geometriai eloszlás várható értékének kiszámításával

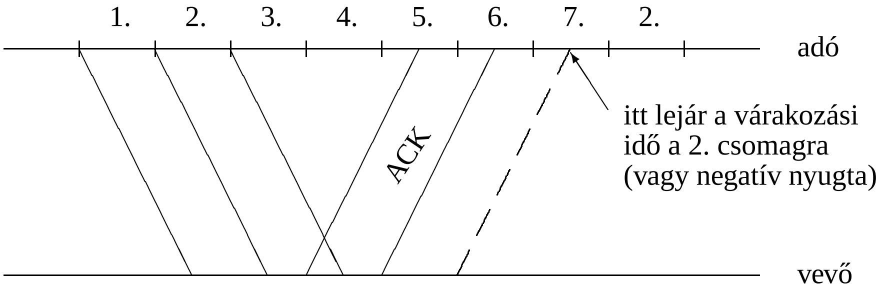
$$\mathbf{E}(t_{\text{trans}}) = \frac{T+\tau}{1-p}.$$

Az újraküldések miatt bekövetkező időnövekedést jól mutatja a nevezőben lévő $1-p$ faktor. Az $\mathbf{E}(t_{\text{trans}})$ értékének felhasználásával a stabilitás feltétele tehát

$$\mathbf{E}(Y_1) < \frac{T}{\mathbf{E}(t_{\text{trans}})} = \frac{T}{\frac{T+\tau}{1-p}} = \frac{1-p}{\frac{T+\tau}{T}} = \frac{1-p}{a},$$

ahol bevezettük az

$$a := \frac{T+\tau}{T} = 1 + \frac{\tau}{T} \geq 1$$



2.6. ábra. Go-Back-N protokoll

paramétert. Amennyiben a nyugta visszaérkezéséhez szükséges τ idő a gyors jelterjedési és feldolgozási idő miatt elhanyagolható, akkor $a = 1$, s így visszakapjuk a késleltetésmentes esetet:

$$\mathbf{E}(Y_1) < 1 - p.$$

2.4.3. Go-Back-N protokoll

A legtöbb modern kommunikációs rendszer full-duplex átvitelt használ, s feltételezhetjük, hogy a csatorna sem túl rossz, vagyis az elküldött csomagok általában rendben odaérnek a vevőhöz. Ebben az esetben célszerűbbnek tűnik, hogy az adó folyamatosan küldje a rendelkezésre álló csomagokat anélkül, hogy mindig nyugtára várna. Amennyiben negatív nyugtát kap, vagy lejár a várakozási idő, az adott csomagot és az ezt követően elküldött csomagokat újraküldi. Ezt valósítja meg a Go-Back-N (visszalépés N-nel) protokoll (2.6. ábra). A csomagok folyamatos adása növeli az átvitelt, különösen akkor, ha a jelterjedési idő nem hanyagolható el egy csomag adási idejéhez képest. A protokoll gyakorlati megvalósításaiban nem feltétlenül kell minden egyes csomagot nyugtázni. Az ún. kumulatív nyugta nem csak az adott csomagot, hanem az azt megelőző csomagokat is nyugtázza.

A Stop-and-Wait protokollnál megismert időjellemzőket felhasználva a Go-back-N protokollnál két csomag adása között csak minimum T időnek kell eltelnie (nem pedig $T + \tau$ időnek). Az előzőekhez hasonló feltételekkel élve számítsuk ki egy csomag sikeres átvitelének átlagos idejét.

Amennyiben az i-edik kísérlet sikeres, egy csomag továbbítási ideje:

$$\begin{array}{ll} i=1 & T \\ i=2 & T+1(T+\tau) \\ \vdots & \vdots \\ i & T+(i-1)(T+\tau) \end{array}$$

s így

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t_{\text{trans}}) &= \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1}(1-p)\left(T+(i-1)(T+\tau)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1}(1-p)\left(-\tau+i(T+\tau)\right) = \\ &= -\tau\cdot\sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1}(1-p)+(T+\tau)\cdot\sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1}(1-p) = \\ &= -\tau\cdot 1+\frac{T+\tau}{1-p} = \\ &= \frac{p\tau+T}{1-p} \end{aligned}$$

A stabilitás feltétele pedig, a Stop-and-Wait protokollnál levezetett módon:

$$\mathbf{E}(Y_1)=\frac{T}{\mathbf{E}(t_{\text{trans}})}<\frac{T}{\frac{p\tau+T}{1-p}}=\frac{1-p}{\frac{p\tau}{T}+1}=\frac{1-p}{p(a-1)+1}.$$

Itt is visszakapjuk a késleltetésmentes esetet, ha $a=1$ (amikor a jelterjedési és feldolgozási idő elhanyagolható egy csomag adási idejéhez képest).

Az optimális csomagméret meghatározásához ebben az esetben az

$$\frac{(1-p_{\text{b}})^{N_{\text{h}}+N_{\text{d}}}}{\left(1-(1-p_{\text{b}})^{N_{\text{h}}+N_{\text{d}}}\right)(a-1)+1}\cdot\frac{N_{\text{d}}}{N_{\text{h}}+N_{\text{d}}}$$

kifejezést kell maximalizálnunk. Ehhez a kifejezés N_{d} szerinti deriváltja legyen 0:

$$\frac{(1-p_{\text{b}})^{N_{\text{h}}+N_{\text{d}}}\left(\frac{N_{\text{h}}}{N_{\text{h}}+N_{\text{d}}}\left(a-(a-1)(1-p_{\text{b}})^{N_{\text{h}}+N_{\text{d}}}\right)+aN_{\text{d}}\ln(1-p_{\text{b}})\right)}{(N_{\text{h}}+N_{\text{d}})\left(1+(a-1)\left(1-(1-p_{\text{b}})^{N_{\text{h}}+N_{\text{d}}}\right)\right)}=0$$

Sajnos, mivel a számlálóban N_{d} exponenciális és polinom függvényének összege áll, csak speciális esetben tudjuk megoldani az egyenletet. Például az $a=1$ esetre, amellyel a 2.4.1. szakaszban már foglalkoztunk.

2.4.4. Szelektív ismétlés

A szelektív ismétlés (selective repeat) Megegyezik a Go-back-N protokollal abban, hogy az adó itt is folyamatosan küldi a rendelkezésre álló csomagokat. Itt azonban csak azt a csomagot küldi újra az adó, amelyre negatív nyugta érkezett, vagy amelynek lejárt a várakozási ideje és közben nem érkezett pozitív nyugta. Ez a megoldás növeli az adatátviteli teljesítőképességet, azonban a vevő oldalon egy (átrendezésre is alkalmas) puffert igényel, hiszen egy hibás csomag vétele után a további csomagokat mindaddig tárolni kell a vevőben, amíg az előbbi csomag az újraküldéssel helyesen meg nem érkezik (a felsőbb rétegeknek sorrendhelyesen kell átadni a csomagokat). A szükséges puffer mérete különösen nagy lehet műholdas adatátvitel esetén, ahol a nagy jelterjedési idő miatt egyidejűleg sok csomag van úton az adó és a vevő között.

A Nemzetközi Szabványügyi Szervezet (ISO, International Organization for Standardization) az általa kidolgozott OSI hivatkozási modell második, adatkapcsolati rétegében (data link layer) az ún. HDLC (High-level Data Link Control, magas szintű adatkapcsolat-vezérlés) protokollt ajánlja, amely egyfajta szelektív ismétlés technika.

2.5. Feladatok

2.1. feladat. *Legyen V_n és Y_n bináris úgy, hogy*

$$\mathbf{P}(V_n = 1) = p \;\; \textit{és} \;\; \mathbf{P}(Y_n = 1) = q.$$

Lássuk be, hogy ha $0 < q < p < 1$, akkor

a) az evolúciós egyenlettel adott sorhossz stabil!

b) a várakozási idő stabil!

2.2. feladat. *Legyen az 1.39. feladatban $p = 0.5$ és $q = 0.4$. Várhatóan mennyit kell várakoznia egy hallgatónak, amíg a professzor beírja a jegyét?*

2.3. feladat. *Legyen az 1.39. feladatban $p = 0.5$ és $q = 0.4$. Tegyük fel, hogy a professzor szobájába maximum 4 hallgató fér be, és a szoba előtt nem folytatódhat a sor, mert a dékán úr egy nemrég közreadott rendelete szerint tilos az egyetem közterületein jegyre várakozni. Stacionárius eloszlást feltételezve, mi annak a valószínűsége, hogy az újonnan érkező diák nem fér be a professzor szobájába és kénytelen később visszajönni?*

2.4. feladat. *Egy adatcsomagot továbbító csatorna $\frac{1}{4}$ valószínűséggel áll rendelkezésre, azaz tud átküldeni csomagot egy időrésben. Új csomag $\frac{1}{3}$ valószínűséggel érkezik egy időrésben. Írjuk fel a sorhossz átmenetvalószínűség-mátrixát, ha a pufferben maximum négy csomag fér el!*

2.5. feladat. *Közeledvén a tél, az erdő szélén lakó kismókus elhatározza, hogy hozzáfog a diógyűjtéshez. Vidáman ugrándozik a diófán és félpercenként, ha mancsa ügyébe akad egy dió, akkor azt ledobja a fa alá. Ennek a valószínűsége $\frac{1}{3}$. Közel s távol egy állatot sem látni, így hát úgy gondolja, ráér majd a nap végén összeszedni a lehajigált diókat. Igen ám, de amint a mókus a gyűjtéshez lát, kidugja a föld alól a fejét a falánk kishörcsög. Ez a kishörcsög ezután is minden egész percben kidugja a fejét, körülnéz, és ha meglát a fa alatt egy diót, azt egy perc alatt jóízűen belakmározza, majd ismét körbenéz újabb finom falat után. Ha nincs dió a fa alatt, akkor a következő percig visszabújik a föld alá. A kismókus minden perc végén lenéz a fa alá, hogy mennyi dió gyűlt már össze, és elgondolkozik azon az érdekességen, hogy a fa alatt gyűlő diók száma vajon Markov-láncot alkot-e. Írd fel a lánc átmenetmátrixát! Stabil-e a lánc? Várhatóan mennyi diót fog látni a kismókus, amikor lenéz?*

2.6. feladat. *Várhatóan mennyi ideje van hátra az előző feladat egy diójának leesés után, míg a kishörcsög megeszi, ha feltételezzük, hogy a kishörcsög jártas a sorbanállás-elméletben és elhatározza, hogy FIFO rendszer szerint fogyasztja a diókat, azaz amit a kismókus hamarabb dobott le, annak lát neki ő is hamarabb?*

2.7. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a geometriai eloszlás örökifjú, azaz ha az Y valószínűségi változó p paraméterű geometriai eloszlású, akkor minden $i, j \geq 0$ egészekre*

$$\mathbf{P}(Y = i + j \mid Y \geq j) = \mathbf{P}(Y = i).$$

2.8. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha $\{Y_n\}$ független és azonos eloszlású sorozat, $\{V_n\}$ stacionárius Markov-lánc, melyek egymástól és X_0-tól is függetlenek, továbbá az X_n-t a (2.12) képlet definiálja, akkor $\{(X_n, V_n)\}$ egy kétdimenziós homogén Markov-lánc!*

2.9. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a (2.14) képlettel definiált $\{S_{i,n}\}$ akkumulált sorhossz rögzített i-re homogén Markov-lánc!*

2.10. feladat. *Tekintsük a csomagküldés problémáját zajos csatornán késleltetésmentes nyugta esetén. Legyen a csomag meghibásodásának valószínűsége 0.1. Ha egy résben q valószínűséggel keletkezik egy csomag, akkor legfeljebb mekkora lehet q ahhoz, hogy az átlagos késleltetés 5 résnél kisebb legyen?*

2.11. feladat. *Az előző feladatban legfeljebb mekkora lehet q értéke ahhoz, hogy az 5 résnél nagyobb késleltetés valószínűsége* 0.01*-nál kisebb legyen.*

2.12. feladat. *Tekintsük a Stop-and-Wait és a Go-Back-N protokollt, és legyen egy csomag hibás átvitelének valószínűsége $p = 0.01$. Milyen időarányok (a) esetén stabil a két rendszer?*

2.13. feladat. *Rendelkezésünkre áll egy adatátviteli csatorna, amelynek csomagmérete 1200 bit, átviteli sebessége 9600 bps. A jelterjedési idő 2 ms, a feldolgozási időtől pedig tekintsünk el. Mekkora egy csomag sikeres továbbításának átlagos ideje a Stop-and-Wait, illetve a Go-Back-N protokoll esetén?*

3. fejezet

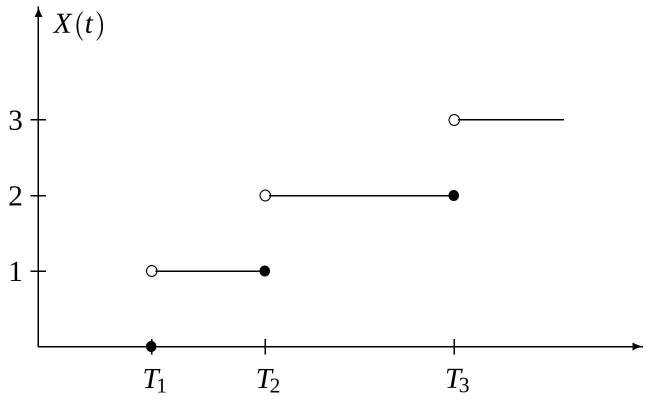
Folytonos idejű Markov-láncok

Ebben a fejezetben olyan $\{X(t) : t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamatokat vizsgálunk, melyek rendelkeznek a Markov-tulajdonsággal, azaz a folyamat jövője és múltja feltételesen függetlenek a jelen ismeretében, ugyanakkor az állapotváltozások tetszőleges időpontban történhetnek. Azon tömegkiszolgálási feladatoknál, ahol az igények érkezési időpontjai nemnegatív valós értékeket vehetnek fel, ezen modell alkalmazása pontosabb analízist tesz lehetővé, mint a diszkrét idejű Markov-láncokkal való közelítés.

Először a Poisson-folyamat fogalmát vezetjük be, amelyről később, a 3.4. szakaszban látjuk be, hogy rendelkezik a Markov-tulajdonsággal.

3.1. A Poisson-folyamat

A gyakorlatban sűrűn találkozhatunk azzal a jelenséggel, hogy egy bizonyos idő alatt bekövetkező események száma jó közelítéssel Poisson-eloszlású. Az első fontos ilyen irányú felfedezés a radioaktív anyagok bomlása kapcsán született. Nevezetesen, ha Geiger–Müller-számlálóval mérjük egy idő alatt elbomlott atomok számát, akkor az Poisson-eloszlású, ahol az eloszlás paramétere arányos az atomok számával és a választott időtartammal. A jelenség mögött az áll, hogy „sok”, „kis” várható értékű, független, bináris valószínűségi változó összegének határeloszlása Poisson, vagyis a binomiális eloszlás határértéke bizonyos feltételek esetén Poisson-eloszlás (lásd a 3.1. tételt). Tömegkiszolgálási problémákban a bizonyos idő alatt keletkezett igények száma ugyanilyen okok miatt általában Poisson-eloszlású. Indokolt tehát, hogy bevezessünk és vizsgáljunk ilyen tulajdonságú folyamatokat.



3.1. ábra. Pontfolyamat

3.1. definíció. *Tekintsünk egy, a valós számegyenesen elhelyezkedő*

$$\{T_i\}_{i=-\infty}^{\infty}, \quad (\ldots T_{i-1} < T_i < T_{i+1} \ldots)$$

véletlen pontsorozatot. Pontfolyamat*nak nevezzük az ebből az*

$$X(t) = \#\{i : 0 \leq T_i < t\} \quad (t \geq 0)$$

összefüggéssel kapott folytonos idejű sztochasztikus folyamatot, ahol a # operátor az utána álló halmaz elemeinek számát adja meg, azaz $X(t)$ a $[0,t)$ intervallumba eső pontok száma.

Mivel $X(t)$ értéke nem függ a T_i pontok indexelésétől, csak azok helyétől, és számunkra csak a nemnegatív félegyenesen lévő pontok az érdekesek, a továbbiakban az egyszerűség kedvéért a legkisebb ilyen pontot fogjuk az 1 indexszel ellátni. Egy pontfolyamat realizációi olyan monoton növő, balról folytonos, lépcső alakú függvények, melyeknek ugrásai éppen a T_i pontokban vannak (3.1. ábra).

3.2. definíció. *Legyen $\lambda > 0$ rögzített szám. λ intenzitású homogén Poisson-folyamatnak nevezünk egy pontfolyamatot, ha az $X(t)$ eloszlása λt paraméterű Poisson-eloszlás, továbbá a folyamat független és stacionárius növekményű, azaz teljesíti a következő három feltételt:*

1. $X(0) \equiv 0$, $\mathbf{P}(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ $(t > 0, k \in S)$;
2. *minden $n \geq 2$ egészre és $0 < t_1 < \ldots < t_n$-re az $X(t_1) - X(0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ valószínűségi változók teljesen függetlenek (független növekményűség);*

3. *minden $s,t > 0$-ra az $X(t) - X(0)$ és az $X(t+s) - X(s)$ valószínűségi változók eloszlása megegyezik (stacionárius növekményűség).*

Ha az $\mathcal{X} = \{X_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamatra minden $t \in T$ esetén teljesül, hogy $\mathbf{E}\left(X_t{}^2\right) < \infty$, akkor $\mathcal{X}$-et *másodrendű folyamat*nak nevezzük. Másodrendű folyamatnál az $m : T \to \mathbb{R}$; $m(t) = \mathbf{E}(X_t)$ összefüggéssel definiált m függvényt a folyamat *várhatóérték-függvény*ének, az $\mathrm{R} : T \times T \to \mathbb{R}$; $\mathrm{R}(s,t) = \mathrm{cov}(X_s, X_t)$ képlettel értelmezett kétváltozós függvényt pedig *kovarianciafüggvény*ének hívjuk. (Ez utóbbit egy speciális esetben már az 1.18. definícióból ismerjük.)

A Poisson-eloszlás tulajdonságaiból következik, hogy a Poisson-folyamat másodrendű, hiszen

$$\mathbf{E}\left(X(t)^2\right) = (\lambda t)^2 + \lambda t < \infty,$$

továbbá várhatóérték-függvénye

$$m(t) = \mathbf{E}(X(t)) = \lambda t \quad (t \geq 0).$$

3.1.1. A binomiális és Poisson-eloszlás kapcsolata

Legyen n darab igényforrásunk, melyek egymástól függetlenül küldenek igényeket egy kiszolgálóhoz. Ha egy időegység alatt egy igényforrás p valószínűséggel küld igényt, akkor a kiszolgáló rendszerbe egy időszakasz alatt beérkező igények száma n-edrendű, p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Ilyen beérkezést tételeztünk fel a 2.2. szakaszban a csomagkoncentrátorok vizsgálatánál is. Ha n nagy és p kicsi, akkor az igények számát jól jellemezhetjük np paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változóval. Ezen közelítés alapja a következő tétel:

3.1. tétel. *Legyen a $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(0 < p_n < 1)$ számsorozat olyan, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0.$$

Ekkor az n-edrendű, p_n paraméterű binomiális eloszlás k-adik tagja $n \to \infty$ esetén tart a λ paraméterű Poisson-eloszlás k-adik tagjához, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n{}^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

BIZONYÍTÁS:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n{}^k (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n^k}{n^k} \cdot p_n{}^k \cdot \frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\quad n\quad\cdots\quad n}\cdot(np_n)^k\cdot\\
&\quad\cdot\frac{1}{(1-p_n)^k}\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n=\\
&= \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\lambda^k\cdot 1\cdot e^{-\lambda},
\end{aligned}
$$

ahol felhasználtuk azt a tényt, mely szerint ha

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = e^x.$$

■

Legyen kiszolgáló egységünk egy telefonközpont, amelybe az előfizetőktől futnak be hívásigények. Az előbbi tételre támaszkodva megindokoljuk, miért tekinthető a Poisson-folyamat a hívások időpontjai által generált pontfolyamat jó közelítésének. Az egyes előfizetők egymástól függetlenül, egy rövid időszakasz alatt kicsi valószínűséggel kezdeményeznek hívást, tehát a befutó hívások száma binomiális eloszlású valószínűségi változó, melyet közelíthetünk Poisson-eloszlással. Az egy időintervallumban beérkező hívások számának várható értéke arányosnak tekinthető az intervallum hosszával (ha λ az időegység alatt bejövő hívások számának várható értéke, akkor egy t hosszú időszeletre ez az adat λt). Egymás utáni időintervallumokban érkező hívások számai jó közelítéssel függetlenek egymástól, és ezzel el is jutottunk a kívánt következtetésig. Gyakorlati megfigyelések alapján ez a közelítés elég pontos.

3.1.2. Poisson-folyamat generálása

Ebben a szakaszban azt fogjuk megvizsgálni, hogyan hozhatunk létre olyan véletlen pontsorozatot, amely által meghatározott pontfolyamat Poisson-folyamat. Ezzel egyrészt a Poisson-folyamat egy újabb fontos tulajdonságát ismerjük meg, másrészt hatékony eszközhöz jutunk a folyamat realizációinak (például szimulációs célokra történő) előállítására. Vizsgálatunkban központi szerepet játszik az exponenciális eloszlás.

3.2. tétel (Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága). *Ha az Y valószínűségi változó λ paraméterű exponenciális eloszlású, akkor*

$$\mathbf{P}(Y < t+s \mid Y \geq t) = \mathbf{P}(Y < s) \quad (s,t \geq 0). \tag{3.1}$$

Megfordítva, ha egy nemnegatív értékű, abszolút folytonos valószínűségi változó eleget tesz a (3.1) kifejezésnek, akkor az eloszlása exponenciális.

BIZONYÍTÁS: Legyen először Y λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y < t+s \mid Y \geq t) &= 1 - \mathbf{P}(Y \geq t+s \mid Y \geq t) = \\
&= 1 - \frac{\mathbf{P}(Y \geq t+s, Y \geq t)}{\mathbf{P}(Y \geq t)} = \\
&= 1 - \frac{\mathbf{P}(Y \geq t+s)}{\mathbf{P}(Y \geq t)} = \\
&= 1 - \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda s} = \\
&= 1 - \mathbf{P}(Y \geq s) = \mathbf{P}(Y < s).
\end{aligned}$$

Most tegyük fel, hogy Y eloszlása kielégíti a (3.1) kifejezést. Mivel az $F(t) = \mathbf{P}(Y < t)$ eloszlásfüggvény monoton növő, azért a $G(t) = \mathbf{P}(Y \geq t) = 1 - F(t)$ függvény monoton csökkenő, és (3.1) alapján

$$1 - \frac{G(t+s)}{G(t)} = 1 - G(s),$$

azaz

$$G(t+s) = G(t) \cdot G(s). \tag{3.2}$$

Megmutatható, hogy a monoton csökkenő és folytonos függvények között (3.2) egyetlen megoldása

$$G(t) = e^{-\lambda t},$$

ahol $\lambda = -\ln G(1)$, és így $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, ami éppen az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye. ■

Az örökifjú tulajdonságot néha úgy is megfogalmazzák, hogy az exponenciális eloszlás memóriamentes vagy Markov-tulajdonságú. Mi az először bevezetett szóhasználatot fogjuk követni.

A 3.2. tétel illusztrálására tekintsünk egy kiszolgálót, amelyben egy igény Y kiszolgálási ideje λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Az örökifjúság azt jelenti, hogy ha a kiszolgálás elkezdésétől már t idő eltelt és az igény feldolgozása még nem fejeződött be, akkor a hátralévő idő eloszlása (az eltelt időtől függetlenül) λ paraméterű exponenciális.

3.3. tétel. *Legyen $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ egymástól teljesen független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók sorozata, és a $\{T_k\}$ véletlen pontsorozatot definiálja a*

$$T_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

összefüggés. Ekkor a generált $\{X(t) : t \geq 0\}$ pontfolyamat λ intenzitású Poisson-folyamat.

BIZONYÍTÁS: Először belátjuk, hogy T_k k-adrendű gamma-eloszlású (más néven k-adrendű Erlang-eloszlású) valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f_k(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0).$$

Ezt teljes indukcióval tehetjük meg.

1. $k = 1$ esetén T_1 λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t \geq 0)$, ami megegyezik az elsőrendű gamma-eloszlás sűrűségfüggvényével.
2. Tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és $i < k$-ra teljesül az állítás. Az Y_j valószínűségi változók függetlensége miatt T_k sűrűségfüggvényét T_{k-1} és Y_k sűrűségfüggvényeinek konvolúciójával nyerjük, és az Y_j-k azonos eloszlása miatt Y_k sűrűségfüggvénye éppen $f_1(t)$, azaz

$$\begin{aligned} f_k(t) &= f_{k-1}(t) * f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{k-1}(s) f_1(t-s)\,\mathrm{d}s = \qquad (3.3)\\ &= \int_0^t \lambda \frac{(\lambda s)^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda s} \lambda e^{-\lambda(t-s)}\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \left(\int_0^t s^{k-2}\,\mathrm{d}s \right) e^{-\lambda t} = \\ &= \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \frac{t^{k-1}}{(k-1)} e^{-\lambda t} = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \qquad (t \geq 0), \end{aligned}$$

   ahol a (3.3) lépésben felhasználtuk az indukciós feltételt.

Ezután írjuk fel azt az eseményt, hogy a $[0,t)$ intervallumban k pont helyezkedik el:

$$\{X(t) = k\} = \{T_k < t\} \cap \{T_{k+1} < t\}^c$$

ahol A^c az A esemény ellentettjét (komplementerét) jelöli. Mivel a $\{T_{k+1} < t\}$ esemény bekövetkezése maga után vonja $\{T_k < t\}$ bekövetkezését, ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(t) = k) &= \mathbf{P}(T_k < t) - \mathbf{P}(T_{k+1} < t) = \int_0^t f_k(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t f_{k+1}(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \int_0^t \left(\lambda \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda s} - \lambda \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} \right) \mathrm{d}s = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \frac{1}{\lambda} f'_{k+1}(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\lambda} f_{k+1}(t) = \\
&= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},
\end{aligned}
$$

ami éppen a Poisson-folyamatot definiáló első feltétel. A független és stacionárius növekményűség következik az Y_i-k függetlenségéből, azonos eloszlásából és az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságából, ennek igazolásától eltekintünk.

■

Tehát exponenciális valószínűségi változók segítségével lehet Poisson-folyamatot generálni, exponenciális eloszlású valószínűségi változót pedig könnyű előállítani egyenletes eloszlásúból (lásd a 3.4. feladatot).

Igaz a tétel megfordítása is, azaz belátható, hogy λ intenzitású homogén Poisson-folyamat esetén a pontok távolságai független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók (lásd a 3.5. feladatot). Ebből következik, hogy ez a tulajdonság egyértelműen jellemzi a Poisson-folyamatot és annak lehetséges ekvivalens definíciójaként szolgálhat.

3.2. Laplace-transzformált

A Laplace-transzformált hasonlóan hasznos eszköz a folytonos idejű függvények világában, mint ahogy a generátorfüggvény a diszkrét idejű esetben. Egy $a(t)$ függvény Laplace-transzformáltja

$$A(s) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

amennyiben az integrál létezik. Ha a függvényünk értéke negatív számokon 0 ($a(t) = 0$, ha $t < 0$), akkor „egyoldali” Laplace-transzformáltról beszélünk

$$A(s) = \int_0^{\infty} a(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Egy $f(t)$ sűrűségfüggvényű eloszlásnak a Laplace-transzformáltja — a generátorfüggvénynél látotthoz hasonlóan — egy várható érték,

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}\left(e^{-sX}\right),$$

ha az X valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvénye $f(t)$. Megjegyezzük, hogy egy eloszlás Laplace-transzformáltja összefüggésben áll az eloszlás ún. momentumgeneráló függvényével, amelynek a definíciója $\mathbf{E}\left(e^{sX}\right)$.

Tekintsük át a Laplace-transzformált néhany fontos tulajdonságát. A definíció alapján világos, hogy $a(t-t_0)$ transzformáltja

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-t_0)e^{-s(t-t_0)}e^{-st_0}\,\mathrm{d}t = e^{-t_0 s}A(s).$$

Szintén a definícióból következik, hogy tetszőleges α konstansra $\alpha a(t)$ Laplace-transzformáltja $\alpha A(s)$.

Most tegyük fel, hogy két függvényünk van, $a(t)$ és $b(t)$, Laplace-transzformáltjaikat jelölje $A(s)$ illetve $B(s)$. Megint csak világos, hogy $a(t)+b(t)$ Laplace-transzformáltja $A(s)+B(s)$.

A két függvény $c = a * b$ konvolúcióján a

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-u)b(u)\,\mathrm{d}u$$

függvényt értjük. Emlékezzünk vissza, hogy — hasonlóan a diszkrét esethez — két folytonos valószínűségi változó összegének eloszlását a két eloszlás konvolúciójaként kaphatjuk meg. Nézzük meg, hogy miként kaphatjuk meg $c(t)$ Laplace-transzformáltját.

$$\begin{aligned}
C(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} c(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = && (3.4)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(t-u)b(u)\,\mathrm{d}u e^{-st}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(t-u)e^{-s(t-u)}b(u)e^{-su}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} a(v)e^{-s(v)}\,\mathrm{d}v \int_{-\infty}^{\infty} b(u)e^{-su}\,\mathrm{d}u = \\
&= A(t)B(t). && (3.5)
\end{aligned}$$

Tehát — a generátorfüggvénynél látottakhoz hasonlóan — az eredeti függvények konvolúciójának képzése helyett az eredmény Laplace-transzformáltja egy egyszerű szorzással adódik.

Megmutatható, hogy ha az eredeti függvény a $t < 0$ értékekre azonosan nulla, akkor deriválása esetén a Laplace-transzformált egyszerűen s-sel szorzódik, azaz $\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}$ transzformáltja

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \left[a(t)e^{-st}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} a(t)(-s)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \\
&= -a(0) + s\int_0^{\infty} a(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \\
&= sA(s) - a(0). && (3.6)
\end{aligned}$$

Példaként számoljuk ki az exponenciális eloszlás $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltját.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-(s+\lambda)t}\,\mathrm{d}t = \left[\lambda \frac{-1}{s+\lambda} e^{-(s+\lambda)t}\right]_0^\infty = \\ &= \frac{\lambda}{s+\lambda}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

A Laplace-transzformált segítségével egy másik bizonyítást is adhatunk a 3.3. tétel azon állítására, hogy T_k k-adrendű gamma-eloszlású. A k-adrendű gamma-eloszlás sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja

$$\frac{\lambda^k}{(s+\lambda)^k}$$

(lásd a 3.6. feladatot), ami éppen k darab exponenciális eloszlás transzformáltjának a szorzata, hiszen az exponenciális eloszlás Laplace-transzformáltja (3.7) szerint

$$\frac{\lambda}{s+\lambda}.$$

Ugyanakkor, ha vesszük k darab független exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegét, akkor az összeg eloszlásának Laplace-transzformáltja is az exponenciális eloszlás Laplace-transzformáltjának a k-adik hatványa, hiszen független valószínűségi változók összeadásakor a Laplace-transzformáltak összeszorzódnak. Azaz k darab független exponenciális eloszlású valószínűségi változó összege gamma-eloszlású.

3.2.1. A Poisson-folyamat további tulajdonságai

Ebben a szakaszban bevezetünk egy új jelölést, amely hasznos lesz a későbbiekben is és ennek segítségével újabb alternatív definíciót adunk a Poisson-folyamatra.

3.3. definíció. *Legyen $f(t)$ és $g(t)$ két, a 0 valamely jobb oldali környezetében értelmezett valós függvény, melyeknek a 0-ban létezik a jobb oldali határértéke. Azt mondjuk, hogy $t \to 0+$ esetén $f(t) = o(g(t))$ (olvasd: $f(t)$ egyenlő* kis ordo *$g(t)$), ha*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

Például ha $f(t) = o(g(t))$ és $\lim_{t\to 0+} g(t) = 0$, akkor $\lim_{t\to 0+} f(t) = 0$ és azt mondhatjuk, hogy $f(t)$ gyorsabban tart 0-hoz, mint $g(t)$. Számunkra azok az esetek lesznek fontosak, amikor $g(t)$ hatványfüggvény (t vagy t^2). A 3.7. feladatban ezekkel kapcsolatban mondunk ki néhány egyszerű állítást.

A továbbiakban ott, ahol ez célszerűnek látszik, bizonyos függvényeket helyettesíteni fogunk náluk lassabban 0-hoz tartó függvényekkel és helyükre egyszerűen a megfelelő $o(\cdot)$ függvényt írjuk, például t^2 helyett $o(t)$-vel számolunk. A 3.7. feladat alapján a következő „számolási szabályokat” alkalmazhatjuk:

$$
\begin{aligned}
o(t) \pm o(t) &= o(t),\\
c\,o(t) &= o(t),\\
o(ct) &= o(t) \quad (c \neq 0),\\
o(t)\cdot o(t) &= o(t),\\
o\left(t^2\right) &= o(t),\\
t\cdot o(t) &= o(t).
\end{aligned}
$$

A fentiek szemléltetésére szolgál a következő fontos példa:

3.1. példa. *Megmutatjuk, hogy* $e^x = 1 + x + o(x)$. *Írjuk fel a függvényt az elsőrendű Taylor-polinommal és a Lagrange-féle maradéktaggal:*

$$e^x = 1 + x + \frac{e^{\xi(x)}}{2}x^2 = 1 + x + r_1(x),$$

ahol $0 < \xi(x) < x$. *Ebből*

$$0 \le \lim_{x\to 0+} \frac{r_1(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\xi(x)}}{2}x \le \lim_{x\to 0+} \frac{e^x}{2}x = 0,$$

azaz $r_1(x) = o(x)$.

3.4. tétel. *Legyen* $\{X(t) : t \ge 0\}$ λ *intenzitású Poisson-folyamat. Ekkor*

1. $\mathbf{P}(X(t) = 0) = 1 - \lambda t + o(t)$;
2. $\mathbf{P}(X(t) = 1) = \lambda t + o(t)$ *(sűrűségi feltétel);*
3. $\mathbf{P}(X(t) \ge 2) = o(t)$ *(ritkasági feltétel).*

BIZONYÍTÁS: A 3.8. feladat állítását felhasználva

$$\mathbf{P}(X(t) = 0) = e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + o(\lambda t) = 1 - \lambda t + o(t),$$

és hasonlóan

$$\mathbf{P}(X(t)=1)=\lambda t e^{-\lambda t}=\lambda t(1-\lambda t+o(t))=\lambda t-\lambda^2t^2+\lambda t o(t)=\lambda t+o(t),$$

valamint

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X(t)\geq 2) &= 1-[\mathbf{P}(X(t)=0)+\mathbf{P}(X(t)=1)]=\\ &= 1-1+\lambda t-o(t)-\lambda t-o(t)=o(t).\end{aligned}$$

■

Szavakban megfogalmazva a fenti tétel azt jelenti, hogy kicsi annak a valószínűsége, hogy egy rövid időintervallumba legalább két pont esik (az intervallum hosszával osztva 0-hoz tart), míg annak a valószínűsége, hogy pontosan egy pont esik ide, körülbelül az intervallum hosszának λ-szorosa.

A tétel megfordításával kapjuk a Poisson-folyamatnak a szakasz bevezetőjében említett újabb ekvivalens definícióját:

3.5. tétel. *Ha az $\{X(t) : t \geq 0\}$ pontfolyamatra teljesül a sűrűségi és ritkasági feltétel, valamint független és stacionárius növekményű, akkor homogén Poisson-folyamat.*

BIZONYÍTÁS: A Poisson-folyamatot definiáló három tulajdonság közül kettő (a független és stacionárius növekményűség) itt is feltételként szerepel, tehát elegendő az egydimenziós eloszlásokra vonatkozó képletet igazolnunk. Bevezetve a $P_k(t)=\mathbf{P}(X(t)=k)$ jelölést $k\geq 1$ és $t,\Delta>0$ esetén a következőt írhatjuk:

$$\begin{aligned}P_k(t+\Delta) &= \mathbf{P}(X(t+\Delta)=k)=\sum_{n=0}^{k}\mathbf{P}(X(t+\Delta)=k, X(t)=k-n)=\\ &= \sum_{n=0}^{k}\mathbf{P}(X(t+\Delta)-X(t)=n, X(t)=k-n)=\\ &= \sum_{n=0}^{k}\mathbf{P}(X(t+\Delta)-X(t)=n)\mathbf{P}(X(t)=k-n)= && (3.8)\\ &= \sum_{n=0}^{k}\mathbf{P}(X(\Delta)=n)P_{k-n}(t)= && (3.9)\\ &= \sum_{n=0}^{k}P_n(\Delta)P_{k-n}(t)=\\ &= P_0(\Delta)P_k(t)+P_1(\Delta)P_{k-1}(t)+o(\Delta), && (3.10)\end{aligned}$$

ahol (3.8) a független növekményűségből, (3.9) a stacionárius növekményűségből, (3.10) pedig a ritkasági feltételből következik. Ismét a sűrűségi és ritkasági feltételeket alkalmazva kapjuk, hogy

$$P_1(\Delta)=\lambda\Delta+o(\Delta)$$

és

$$P_0(\Delta) = 1 - P_1(\Delta) - o(\Delta) = 1 - \lambda\Delta + o(\Delta).$$

Ezeket a (3.10) képletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} P_k(t+\Delta) &= (1-\lambda\Delta + o(\Delta))P_k(t) + (\lambda\Delta + o(\Delta))P_{k-1}(t) + o(\Delta) = \\ &= (1-\lambda\Delta)P_k(t) + \lambda\Delta P_{k-1}(t) + o(\Delta). \end{aligned}$$

A bal oldalon különbségi hányadost képezve

$$\frac{P_k(t+\Delta) - P_k(t)}{\Delta} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta},$$

amelyből elvégezve a $\Delta \to 0+$ határátmenetet a következő differenciálegyenlet-rendszerhez jutunk:

$$P_k'(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) \quad (k \geq 1). \tag{3.11}$$

(A (3.11) kifejezést csak a jobb oldali deriváltra vezettük le. Hasonlóan belátható az is, hogy a bal oldali derivált is kielégíti ezt az egyenletet.) $k = 0$-ra szintén a fenti módszerrel származtatható a

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \tag{3.12}$$

differenciálegyenlet. Kezdeti feltételeink: $P_0(0) = 1$, $P_k(0) = 0 \;\; (k \geq 1)$. A differenciálegyenlet-rendszer megoldására két módszert is bemutatunk:

(i) A (3.12) egyenlet kezdeti feltételünknek eleget tevő megoldása $P_0(t) = e^{-\lambda t}$. $k \geq 0$ esetén vezessük be a $Q_k(t) = P_k(t)e^{\lambda t}$ függvényeket, ezekkel (3.11) alapján a

$$Q_k'(t) = \lambda Q_{k-1}(t) \quad (k \geq 1) \tag{3.13}$$

rendszerhez jutunk, ahol $Q_0(t) \equiv 1$ és $Q_k(0) = 0$ $(k \geq 1)$. A (3.13) egyenletet rekurzívan oldhatjuk meg:

$$\begin{array}{lll} Q_1'(t) = \lambda, & \text{azaz} \quad Q_1(t) = \lambda t + c_1, & \text{ahol } c_1 = 0; \\ Q_2'(t) = \lambda^2 t, & \text{azaz} \quad Q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} + c_2, & \text{ahol } c_2 = 0; \\ Q_3'(t) = \frac{\lambda^3 t^2}{2}, & \text{azaz} \quad Q_3(t) = \frac{(\lambda t)^3}{3!} + c_3, & \text{ahol } c_3 = 0; \\ & \quad \vdots & \\ Q_k'(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}, & \text{azaz} \quad Q_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} + c_k, & \text{ahol } c_k = 0; \\ & \quad \vdots & \end{array}$$

A definíció alapján

$$P_k(t) = Q_k(t)e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},$$

és ezt kellett belátnunk.

(ii) Differenciálegyenletet könnyen megoldhatunk a Laplace-transzformált segítségével. Először oldjuk meg a $k = 0$ esetet, vagyis a (3.12) egyenletet. Jelölje $\widehat{P}_0(s)$ a $P_0(t)$ Laplace-transzformáltját. Ekkor a transzformált (3.6) tulajdonsága szerint $P_0'(t)$ transzformáltja $s\widehat{P}_0(s) - P_0(0)$, ahol a kezdeti feltételek szerint $P_0(0) = 1$. Tehát a (3.12) egyenlet transzformáltja

$$s\widehat{P}_0(s) - 1 = -\lambda \widehat{P}_0(s),$$

amit átrendezve

$$\widehat{P}_0(s) = \frac{1}{s+\lambda}$$

adódik. Ebből pedig (3.7) alapján

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Most nézzük a $k \geq 1$ esetet. Legyen $P(z,t)$ az $X(t)$ eloszlásának generátorfüggvénye és tekintsük a (3.11) egyenlet mindkét oldalának a generátorfüggvényét. Ekkor a

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} - P_0'(t) = -\lambda\,(P(z,t) - P_0(t)) + \lambda z P(z,t)$$

differenciálegyenlethez jutunk. A (3.12) egyenlet szerint $P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$, így ezek a tagok kiejtik egymást a két oldalról és marad

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = -\lambda P(z,t) + \lambda z P(z,t),$$

amit a Laplace-transzformált segítségével könnyen megoldhatunk. Legyen $\widehat{P}(z,s)$ a $P(z,t)$ függvény Laplace-transzformáltja. Ekkor a transzfromált (3.6) tulajdonsága alapján az

$$s\widehat{P}(z,s) - P(z,0) = -\lambda \widehat{P}(z,s) + \lambda z \widehat{P}(z,s)$$

egyenletet kapjuk. Innen

$$\widehat{P}(z,s) = \frac{P(z,0)}{s - \lambda(z-1)},$$

ahol $P(z,0)$ értékét a generátorfüggvény definíciója alapján kaphatjuk meg, kihasználva a kezdeti feltételeket, azaz hogy $P_0(0) = 1$ és $P_k(0) = 0 \ (k \geq 1)$.

$$P(z,0) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(0) z^k = z^0 P_0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(0) z^k = 1.$$

Így tehát

$$\widehat{P}(z,s) = \frac{1}{s - \lambda(z-1)},$$

amiről (3.7) alapján láthatjuk, hogy a

$$P(z,t) = e^{\lambda t (z-1)}$$

függvény Laplace-transzformáltja. $P(z,t)$ pedig éppen a λt paraméterű Poisson-eloszlás generátorfüggvénye (lásd a (2.20) levezetést), így

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

■

3.2.2. Az inhomogén Poisson-folyamat

A gyakorlatban gyakran előfordul, hogy a kiszolgáló egységhez érkező igények által alkotott pontfolyamat nem stacionárius növekményű, például egy telefonközpontba nappal nagyobb intenzitással érkeznek a hívások, mint éjszaka. Ezért néha szükséges az alábbiakban definiált inhomogén Poisson-folyamat alkalmazása.

Legyen $\lambda(t)$ $(t \geq 0)$ nemnegatív integrálható függvény és a folyamat egydimenziós eloszlásait adjuk meg a

$$\mathbf{P}(X(t) = k) = \frac{\left(\int_0^t \lambda(s)\, \mathrm{d}s\right)^k}{k!} e^{-\int_0^t \lambda(s)\, \mathrm{d}s}$$

képlettel. A fentieket teljesítő, független növekményű pontfolyamatot nevezzük inhomogén Poisson-folyamatnak. Ezt a modellt a továbbiakban nem fogjuk használni.

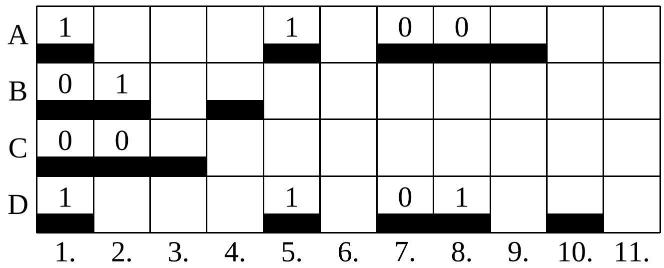
3.3. Véletlen hozzáférés visszacsatolással

Ebben az szakaszban egy, az eddigiektől eltérő tömegkiszolgálási feladatot mutatunk be, a többfelhasználós hírközlés egyik legizgalmasabb problémáját. Azt fogjuk megvizsgálni, hogy milyen módon növelhető egy több felhasználó által közösen használt adatátviteli csatorna áteresztőképessége. Ilyen szituációval találkozhatunk, ha több igényforrás kommunikál egy kiszolgálóval (központtal) egy közös erőforráson keresztül, például amikor terminálok a szervert rádiócsatornán vagy síntopológiájú hálózaton (esetleg buszon) át érik el. A gondok itt magából a kommunikációból adódnak, mivel a csatornát egyszerre csak egy igényforrás használhatja. Előzőleg megismert modelljeinktől eltérően a kiszolgálóban nem képződik sor, az egyes igényforrások egymással együttműködve próbálják meg adatcsomagjaikat a központhoz eljuttatni.

A többfelhasználós hírközlés legegyszerűbb, de még gyakorlati szempontból is fontos csatornamodellje a réselt ütközéses csatorna visszacsatolással. Ekkor az idő egyforma szakaszokra van osztva, egy ilyen szakaszt résnek nevezünk. A továbbiakban ez lesz az időegység és feltesszük, hogy a felhasználók által küldött csomagok továbbítási ideje éppen egy rés, továbbá a csomagok elküldése csak rés elején kezdődhet. Ha egy résben pontosan egy felhasználó küld csomagot, akkor a csatorna kimenete ez a csomag. Ha senki sem küld csomagot, akkor a csatorna kimenete egy üres szimbólum, míg ha legalább két felhasználó küld csomagot egy résben, akkor a csomagok ütköznek, tartalmuk elvész és a csatorna kimenetén egy ütközés szimbólum jelenik meg. A csatorna kimenetét a kiszolgáló látja, aki minden rés végén a visszacsatoláson keresztül tájékoztatja az igényforrásokat az adott résben történt átvitel eredményéről.

Ha N felhasználó akar használni egy ilyen csatornát, akkor a probléma egy megoldása lehet az időosztás, amikor egy felhasználó minden N-edik rést kapja meg kizárólagos használatra. Nyilvánvaló, hogy ez az eljárás akkor hatékony, ha mindig mindenki aktív, azaz van elküldendő üzenete. Ha N nagy és mindenki csak részlegesen aktív, akkor ez az eljárás nem fogja jól kihasználni a közös csatornát és indokolatlanul nagy késleltetést eredményez.

A véletlen hozzáférés alapötlete az, hogy ne féljünk az esetleges ütközéstől, a konfliktustól. Norm Abramsontól ered ez az ötlet, aki a Hawaii Egyetemen az óceánkutató hajók közötti rádiókommunikációra javasolta azt a protokollt, hogy amennyiben egy adó csomagja ütközött, akkor az ismételje meg az adást egy véletlen késleltetési idő eltelte után. A helyi bennszülött köszöntés alapján *ALOHÁ*-nak nevezték el ezt a protokollt. Egy sereg publikáció született arról, hogy ha az új csomagok $\lambda < e^{-1} = 0.36\ldots$ intenzitású Poisson-folyamatot alkotnak, akkor a rendszer feloldásra váró felhasználóinak a száma egy stabil Markov-lánc. Sajnos ezek a cikkek egytől egyig hibásak, mivel az ismétlések egy olyan pozitív visszacsatolást jelentenek, amely tetszőlegesen kis intenzitás esetén egy nem stabil Markov-láncot eredményez. A dolgot a késleltetés eloszlásának változtatásával lehet kijavítani. A Xerox cég Ethernet szabványa szerint az n-edik ismétlés a $[0, c2^n]$ intervallumon egyenletes eloszlású. Az Ethernet az ALOHA elvet kombinálja azzal, hogy a kábelen ütközést és vivőt is tudunk detektálni, vagyis egy



3.2. ábra. A konfliktusfeloldó algoritmus menete

csomag adását csak akkor indítjuk, ha nincs vivő, és ha adás közben ütközést észlelünk, akkor abbahagyjuk az adást.

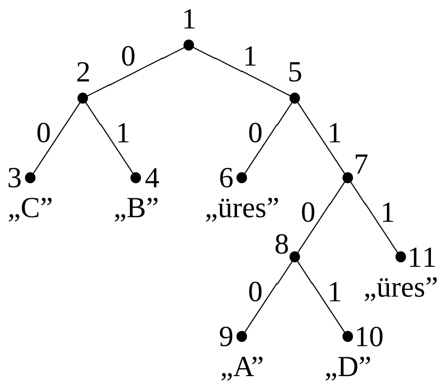
Térjünk vissza a réselt ütközéses csatorna problémájára. Léteznek hatékony algoritmusok ilyen konfliktusok feloldására akkor, ha (mint esetünkben) van visszacsatolás. Konfliktusfeloldó algoritmuson (collision-resolution algorithm, CRA) egy olyan protokollt értünk, amely biztosítja az egymással ütközött csomagok mindegyikének a csatornán előbb-utóbb történő átjutását, és lehetővé teszi, hogy minden igényforrás értesüljön a konfliktus feloldásáról. Amíg az eredeti konfliktusban szerepelt csomagok átvitele be nem fejeződött, addig új csomagot senki sem küldhet el, ezért az ütközésben nem érintett felhasználóknak is figyelniük kell a visszacsatolást.

Egy ilyen konfliktusfeloldó algoritmus a faalgoritmus, ahol a visszacsatolás három értékű:

- üres rés (senki sem küldött csomagot);
- siker (pontosan egy felhasználó küldött csomagot);
- ütközés (legalább ketten küldtek csomagot).

Az algoritmus szerint minden aktív felhasználó (N darab) elküldi csomagját az első résben. Ha $N = 0$, akkor a kimenet és a visszacsatolás üres és az algoritmus leáll. Ha $N = 1$, akkor kimenet egy csomag, a visszacsatolás siker és az algoritmus szintén leáll. Ha $N \geq 2$, akkor a kimenet és a visszacsatolás ütközés, és mindegyik konfliktusban lévő felhasználó $1/2$-$1/2$ valószínűséggel kisorsol 0-t illetve 1-et. Mindazok, akik 0-t sorsoltak, elküldik csomagjaikat a rákövetkező $(2.)$ résben, míg azok, akik 1-et sorsoltak, a 2. résben kezdődő konfliktusfeloldó algoritmus befejeződése utáni első résben küldik el csomagjukat újra. Az ezek után bekövetkező ütközések feloldására rekurzívan ugyanezt a módszert alkalmazzuk.

3.2. példa. *A faalgoritmus működésének szemléltetésére tegyük fel, hogy $N = 4$ és jelöljük a konfliktusban lévő csomagokat A-val, B-vel, C-vel és D-vel. A 3.2.*



rés	számláló
1	2
2	3
3	2
4	1
5	2
6	1
7	2
8	3
9	2
10	1
11	0

3.3. ábra. A konfliktusfeloldó algoritmus által bejárt bináris fa

ábra mutatja a csatornán az egymás utáni résekben megjelenő csomagokat és a rések végén sorsolt értékeket.

Vegyük észre, hogy a 10-es résben nem ér véget az eredeti konfliktus feloldása, hiszen nem tudhatjuk, hogy nincs olyan felhasználó, aki az 1-es rés végén 1-et, az 5-ös rés végén 1-et és a 7-es rés végén is 1-et sorsolt, ez csak a 11-es rés után derül ki.

Az eljárás megfogalmazható úgy is, hogy az ütköző csomagok a sorsolásokkal egy bináris fát járnak be, ahol az élekre írt 0 illetve 1 jelentik a sorsolás eredményét és a csúcspontok felelnek meg az egyes réseknek. A fa gyökere az eredeti konfliktus, belső pontjai a későbbi konfliktusok, levelei pedig az üres illetve siker szimbólumoknak megfelelő rések. Egy konfliktus (akár az eredeti, akár későbbi) akkor oldódik fel, ha gyökere lesz egy olyan bináris fának, amelyben minden belső csúcsnak (a gyökeret is beleértve) két fia van. Ekkor teljesül ugyanis, hogy mind a 0-t, mind az 1-et sorsolt felhasználók sikeresen elküldték csomagjaikat. Mivel bármely bináris fában pontosan eggyel több levél van, mint belső pont (lásd a 3.9. feladatot), azért egy konfliktus feloldását minden felhasználó detektálni tudja a visszacsatolás alapján a következő egyszerű módon: ütközéskor beállít egy számlálót kettőre, melyet növel minden további ütközéskor és csökkent üres illetve sikeres rés esetén; amikor a számláló eléri a 0-t, akkor a konfliktus feloldódott.

3.3. példa. *A 3.2. példában a bináris fa a 3.3. ábrán látható.*

Legyen X a konfliktusban lévő felhasználók száma és Y a konfliktusfeloldás ideje. A sorsolás miatt Y még akkor is véletlen, ha X ismert. Jelölje L_N az Y

feltételes várható értékét az $X = N$ feltétel mellett, azaz

$$L_N = \mathbf{E}(Y \mid X = N).$$

Nyilván

$$L_0 = 1$$

és

$$L_1 = 1.$$

Ha $N \geq 2$ és az 1-es rés után i felhasználó sorsol 0-t és $(N-i)$ sorsol 1-et $(i = 0, 1, \ldots, N)$, akkor a feloldási idő várható értéke

$$1 + L_i + L_{N-i},$$

és ennek a sorsolásnak a valószínűsége

$$\binom{N}{i} 2^{-N},$$

tehát a teljes várható érték tétele alapján

$$\begin{aligned}
L_N &= 1 + \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} 2^{-N} (L_i + L_{N-i}) = \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} 2^{-N} L_i + \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} 2^{-N} L_{N-i} = \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} 2^{-N} L_i + \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{N-i} 2^{-N} L_i = \\
&= 1 + 2 \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} 2^{-N} L_i,
\end{aligned}$$

következésképp

$$L_N(1 - 2^{-N+1}) = 1 + 2^{-N+1} \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N}{i} L_i. \tag{3.14}$$

Ez a rekurzió lehetővé teszi, hogy L_N-t tetszőleges N-re kiszámoljuk. Sajnos L_N pontos aszimptotikus viselkedése nem ismert, de tudjuk például, hogy

$$2.8810 \leq \liminf_{N \to \infty} \frac{L_N}{N} \leq \limsup_{N \to \infty} \frac{L_N}{N} \leq 2.8867. \tag{3.15}$$

Mi itt most egy kicsit kevesebbet mutatunk meg:

3.6. tétel. $N \geq 1$ *esetén*

$$L_N \leq 3N - 1.$$

BIZONYÍTÁS: Teljes indukcióval bizonyítunk. Tudjuk, hogy $L_0 = 1$,

$$L_1 = 1 \leq 3 \cdot 1 - 1 = 2,$$

és a (3.14) összefüggésből

$$L_2 = 5 \leq 3 \cdot 2 - 1 = 5,$$

azaz $N = 1$-re és $N = 2$-re teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy minden $1 \leq i \leq N - 1$ esetén

$$L_i \leq 3i - 1.$$

Ekkor a (3.14) összefüggésből következik, hogy

$$\begin{aligned}
L_N(1 - 2^{-N+1}) = 1 + 2^{-N+1}\left(1 + N + \sum_{i=2}^{N-1}\binom{N}{i}L_i\right) &\leq \\
\leq \quad 1 + 2^{-N+1}\left(1 + N + \sum_{i=2}^{N-1}\binom{N}{i}(3i-1)\right) &= \\
= \quad 1 + 2^{-N+1}\left(1 + N - (-1) - 2N - (3N-1) + \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}(3i-1)\right) &= \\
= \quad 1 + 2^{-N+1}(-4N+3) + 2\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}2^{-N}(3i-1) &= \\
= \quad 1 + 2^{-N+1}(-4N+3) + 2(3N/2 - 1) &= \\
= \quad 3N - 1 - 2^{-N+1}(4N-3) &\leq \\
\leq \quad (3N-1)(1 - 2^{-N+1}), &
\end{aligned}$$

ezért

$$L_N \leq 3N - 1.$$

■

Két példát mutatunk arra, hogy a fent leírt faalgoritmust hogyan lehet véletlen hozzáférésre használni.

3.3.1. Capetanakis-algoritmus

A rendszer üresen indul és az időt véletlen hosszúságú úgynevezett konfliktusfeloldó intervallumokra (collision-resolution interval, CRI) osztjuk a következő módon: az első CRI hossza az első résben érkezett csomagok konfliktusfeloldási ideje, az n-edik CRI hossza pedig az $(n-1)$-edik CRI-ben érkezett csomagok feloldási ideje.

3.7. tétel. *Tegyük fel, hogy a csomagok* λ *intenzitású* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *Poisson-folyamat szerint érkeznek. Ha*

$$\lambda < \frac{1}{3},$$

akkor a CRI-k végén konfliktusfeloldásra váró csomagok számának sorozata stabil Markov-lánc.

BIZONYÍTÁS: Jelölje X_n illetve Y_n az n-edik CRI végén feloldásra váró csomagok számát illetve az n-edik CRI hosszát. Egyszerűen belátható, hogy $\{X_n\}$ Markov-lánc, továbbá az is, hogy irreducíbilis és aperiodikus, így a stabilitáshoz a Foster-kritérium (1.12. tétel) feltételeit kell ellenőrizni. Általában

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = i) = \frac{\mathbf{E}\left(X_{n+1}\mathrm{I}_{\{X_n=i\}}\right)}{\mathbf{P}(X_n = i)} &= \\
= \quad \frac{\mathbf{E}\left(\sum_{d=1}^{\infty} X_{n+1}\mathrm{I}_{\{X_n=i,Y_{n+1}=d\}}\right)}{\mathbf{P}(X_n = i)} &= \\
= \quad \frac{\sum_{d=1}^{\infty} \mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = i, Y_{n+1} = d)\mathbf{P}(X_n = i, Y_{n+1} = d)}{\mathbf{P}(X_n = i)} &= \\
= \quad \sum_{d=1}^{\infty} \mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = i, Y_{n+1} = d)\mathbf{P}(Y_{n+1} = d \mid X_n = i) &= \\
= \quad \sum_{d=1}^{\infty} \mathbf{E}(X_{n+1} \mid Y_{n+1} = d)\mathbf{P}(Y_{n+1} = d \mid X_n = i) &= \\
= \quad \sum_{d=1}^{\infty} \lambda d\, \mathbf{P}(Y_{n+1} = d \mid X_n = i) &= \\
= \quad \lambda \mathbf{E}(Y_{n+1} \mid X_n = i)&,
\end{aligned}$$

ezért egyrészt

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = 0) = \lambda \mathbf{E}(Y_{n+1} \mid X_n = 0) = \lambda < \infty,$$

másrészt a 3.6. tétel miatt minden $i \geq 1$-re

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = i) = \lambda \mathbf{E}(Y_{n+1} \mid X_n = i) = \lambda L_i \leq \lambda(3i - 1) < i - \lambda,$$

és ezzel az 1.12. tétel feltételeit ellenőriztük $I = 0$, $C = \lambda$, $d = \lambda$ esetén. ■

Ha a 3.6. tétel helyett a (3.15) képlettel adott felső korlátot használjuk, nevezetesen azt, hogy

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{L_N}{N} \leq 2.8867 ,$$

(amit nem bizonyítottunk), akkor a 3.7. tétel feltétele gyengíthető, és a lánc stabil, ha

$$\lambda < \frac{1}{2.8867} = 0.346 .$$

3.3.2. Gallager-algoritmus

A rendszer üresen indul és az időt Δ hosszú szegmensekre osztjuk, ahol Δ a rés egész számú többszöröse. Az n-edik szegmensben érkezett csomagok konfliktus-feloldása az $(n-1)$-edikben érkezettek feloldásának befejezése utáni első résben kezdődik, de legkorábban a szegmenst követő első résben. Az n-edik szegmensben érkezett csomagok feloldási idejét jelölje Y_n, akkor az $(n+1)$-edik szegmens végén hátralévő X_{n+1} feloldási idő a következőképpen számolható:

$$X_{n+1} = (X_n - \Delta)^+ + Y_{n+1}, \tag{3.16}$$

tehát az előző fejezetben tárgyalt evolúciós egyenletre jutottunk.

3.8. tétel. *Tegyük fel, hogy a csomagok λ intenzitású $\{Z(t) : t \geq 0\}$ Poisson-folyamat szerint érkeznek. Ha*

$$\lambda < \frac{1}{3} + \frac{1-2e^{-\lambda\Delta}}{3\Delta},$$

akkor a szegmensek végén hátralévő $\{X_n\}$ feloldási idő stabil Markov-lánc.

BIZONYÍTÁS: A 2.1. tétel miatt a (3.16)-vel megadott Markov-lánc stabil, ha

$$\mathbf{E}(Y_1) < \Delta.$$

Jelölje Z_n az n-edik szegmensben beérkezett csomagok számát. Ekkor Z_n minden n-re $\lambda\Delta$ paraméterű Poisson-eloszlású. Ezért, valamint felhasználva a 3.6. tételben a feloldási időre kapott felső korlátot

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_1) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E}(Y_1 \mid Z_1 = i)\mathbf{P}(Z_1 = i) = \\
&= \mathbf{E}(Y_1 \mid Z_1 = 0)\mathbf{P}(Z_1 = 0) + \sum_{i=1}^{\infty} L_i \mathbf{P}(Z_1 = i) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(Z_1 = 0) + \sum_{i=1}^{\infty} (3i-1)\mathbf{P}(Z_1 = i) = \\
&= \mathbf{P}(Z_1 = 0) + 3\mathbf{E}(Z_1) - [1 - \mathbf{P}(Z_1 = 0)] = \\
&= 3\lambda\Delta - 1 + 2\mathbf{P}(Z_1 = 0) = \\
&= 3\lambda\Delta - 1 + 2e^{-\lambda\Delta}.
\end{aligned}$$

Tehát a lánc stabil, amennyiben

$$3\lambda\Delta - 1 + 2e^{-\lambda\Delta} < \Delta,$$

vagyis ha

$$\lambda < \frac{1}{3} + \frac{1 - 2e^{-\lambda\Delta}}{3\Delta}.$$

■

A tétel feltétele λ-ra bizonyos Δ választás esetén szigorúbb, mint a Capetanakis-algoritmus

$$\lambda < \frac{1}{3}$$

feltétele, bizonyos Δ esetén enyhébb. Mivel Δ egész szám, ezért csupán Δ néhány értékénél kell megkeresni λ maximumát. Kiszámolható, hogy ha $\Delta = 4$ vagy 5, akkor

$$\lambda < 0.379$$

esetén stabil a lánc. A Capetanakis-algoritmushoz hasonlóan (3.15) segítségével javítható ez az eredmény:

$$\lambda < 0.4294\,.$$

3.4. Folytonos idejű Markov-láncok

A folytonos idejű Markov-láncok meglehetősen bonyolult általános elméletébe nyújtunk betekintést a 3.4.1. szakaszban. Ezután részletesebben megvizsgáljuk a véges állapotú Markov-láncokra vonatkozó stabilitási eredményeket. A sorbanállási alkalmazások szempontjából legfontosabb születési és halálozási folyamatokat a 3.4.3. szakaszban tárgyaljuk.

3.4.1. Általános jellemzők, a rátamátrix

Legyen $\{X(t) :\ t \geq 0\}$ a nemnegatív valós számegyenesen értelmezett folyamat, ahol $X(t)$ értékeit a nemnegatív egészek halmazából veszi, azaz az állapottér továbbra is az $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ halmaz.

3.4. definíció. *Az $X(t)$-t* folytonos idejű Markov-láncnak *nevezzük, ha minden $n \geq 1$-re, $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$-re és $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \in S$-re teljesül a*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0) = \\ = \quad \mathbf{P}(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

összefüggés, amennyiben a feltételes valószínűségek léteznek.

A folyamat véges dimenziós eloszlásait ebben az esetben is meghatározzák az átmenetvalószínűségek és a kezdeti eloszlás. A további tárgyalásban csak homogén Markov-láncokkal foglalkozunk, ezekre az átmenetvalószínűségeket a

$$p_{ij}(t) = \mathbf{P}(X(t+s) = j \mid X(s) = i) \quad (i, j \in S,\ s,t \geq 0)$$

képlet definiálja. Vegyük észre, hogy $p_{ij}(t)$ a t paraméter függvénye, de a homogenitás miatt nem függ s-től.

3.4. példa. *Megmutatjuk, hogy a homogén Poisson-folyamat homogén Markov-lánc. (3.17) bal oldalát felírva a Poisson-folyamatra és felhasználva annak független növekményűségét azt kapjuk, hogy*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0) = \\
&= \frac{\mathbf{P}(X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0)}{\mathbf{P}(X(t_{n-1}) = x_{n-1}, X(t_{n-2}) = x_{n-2}, \ldots, X(t_0) = x_0)} = \\
&= \frac{\mathbf{P}(X(t_n) - X(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0)}{\mathbf{P}(X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}) = x_{n-1} - x_{n-2}, \ldots, X(t_0) = x_0)} = \\
&= \frac{\mathbf{P}(X(t_0) = x_0) \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X(t_i) - X(t_{i-1}) = x_i - x_{i-1})}{\mathbf{P}(X(t_0) = x_0) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(X(t_i) - X(t_{i-1}) = x_i - x_{i-1})} = \\
&= \mathbf{P}(X(t_n) - X(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}),
\end{aligned}$$

és hasonlóan a jobb oldalra is

$$\mathbf{P}(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}) = \mathbf{P}(X(t_n) - X(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}).$$

A független és stacionárius növekményűségből pedig következik a homogenitás, hiszen

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X(t+s) = j \mid X(s) = i) &= \frac{\mathbf{P}(X(t+s) - X(s) = j - i, X(s) = i)}{\mathbf{P}(X(s) = i)} = \\
&= \frac{\mathbf{P}(X(t+s) - X(s) = j - i)\mathbf{P}(X(s) = i)}{\mathbf{P}(X(s) = i)} = \\
&= \mathbf{P}(X(t) = j - i),
\end{aligned}$$

ami valóban nem függ s-től.

Folytonos idejű Markov-láncokra is érvényes a Chapman–Kolmogorov-egyenlet, azaz

$$\begin{aligned}
p_{ij}(s+t) &= \sum_{k \in S} \mathbf{P}(X(s+t) = j, X(t) = k \mid X(0) = i) = \\
&= \sum_{k \in S} \mathbf{P}(X(s+t) = j \mid X(t) = k)\mathbf{P}(X(t) = k \mid X(0) = i) = \\
&= \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s) \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

és hasonlóan

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(s)p_{kj}(t). \tag{3.19}$$

Az átmenetmátrixra (amely a t paraméter függvénye) bevezetve a

$$\mathbf{\Pi}(t) = [p_{ij}(t)]$$

jelölést, (3.18) és (3.19) a következő alakot ölti:

$$\mathbf{\Pi}(s+t) = \mathbf{\Pi}(t)\mathbf{\Pi}(s) = \mathbf{\Pi}(s)\mathbf{\Pi}(t) \quad (s,t \geq 0). \tag{3.20}$$

A továbbiakban feltesszük, hogy a $p_{ij}(t)$ függvények kielégítik a

$$\lim_{t\to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \tag{3.21}$$

egyenlőséget. Ez eléggé kézenfekvő, hiszen azt kívánjuk meg, hogy „kis” idő alatt a folyamat „nagy” valószínűséggel maradjon ugyanabban az állapotban.

A folyamatot (azaz annak véges dimenziós eloszlásait) megadhatjuk a kezdeti eloszlással ($X(0)$ eloszlásával) és a $p_{ij}(t)$ függvényekkel. A diszkrét idejű esetben láttuk, hogy az egylépéses átmenetvalószínűségek meghatározták az n-lépéses átmenetvalószínűségeket. Folytonos idejű esetben ezzel analóg módon a $p_{ij}(t)$ 0 körüli viselkedése jellemzi azt tetszőleges t-re, ugyanis a (3.20) kifejezést iterálva alkalmazva minden n-re

$$\mathbf{\Pi}(t) = \mathbf{\Pi}(t/n)\mathbf{\Pi}(t-t/n) = \cdots = \mathbf{\Pi}(t/n)^n. \tag{3.22}$$

Ha a (3.22) képletben n-et minden határon túl növeljük, akkor t/n 0-hoz tart.

3.1. lemma. *Ha egy folytonos idejű Markov-lánc kielégíti a (3.21) feltételt, akkor*

$$p_{ii}(t) > 0 \quad (t > 0, i \in S).$$

BIZONYÍTÁS: (3.21) miatt minden $i \in S$-hez létezik $\varepsilon_i > 0$ úgy, hogy $0 < t < \varepsilon_i$-re $p_{ii}(t) > 0$. De (3.22) miatt minden n-re

$$p_{ii}(t) \geq p_{ii}(t/n)^n,$$

amelynek jobb oldala pozitív, ha n olyan nagy, hogy $t/n < \varepsilon_i$. ■

Felvetődik a kérdés, hogy meg lehet-e határozni a $p_{ij}(t)$ függvényeket azoknak valamely egyszerű jellemzőjével. Mint majd kiderül, a válasz általában nemleges, de számos fontos esetben a $p_{ij}(t)$ 0-ban vett jobb oldali deriváltja egyértelműen leírja az egész függvényt. Ez egyrészt azért fontos, mert ezeket a Markovláncokat ily módon a $p_{ij}(t)$ függvények helyett megadhatjuk egyetlen mátrixszal, másrészt a gyakorlati problémákban (mint azt majd látni fogjuk) éppen ezek a deriváltak adottak.

3.9. tétel. *Ha egy Markov-láncra teljesül (3.21), akkor a $p_{ij}(t)$ függvények differenciálhatók $t \geq 0$-ra ($t = 0$ esetén jobbról).*

A tétel bizonyításától annak bonyolultsága miatt eltekintünk. Az előzőek alapján számunkra a 0-beli deriváltak az érdekesek. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$q_{ij} = p'_{ij}(0+) = \lim_{t \to 0+} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t} \quad (i, j \in S). \tag{3.23}$$

Belátható, hogy q_{ij} mindig nemnegatív és véges, ha $i \neq j$, továbbá hogy q_{ii} nempozitív, de lehet $-\infty$ is. Mi csak azokkal a láncokkal foglalkozunk, amelyekre $q_{ii} > -\infty$.

3.5. definíció. *A*

$$\mathbf{Q} = [q_{ij}] = \mathbf{\Pi}'(0+)$$

mátrixot a folyamat rátamátrix*ának vagy* infinitezimális generátor*ának nevezzük.*

3.5. példa. *Számoljuk ki a Poisson-folyamat rátamátrixát!*

$$q_{ii} = \lim_{t \to 0+} \frac{p_{ii}(t) - 1}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{e^{-\lambda t} - 1}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{1 - \lambda t + o(t) - 1}{t} = -\lambda.$$

$$q_{i,i+1} = \lim_{t \to 0+} \frac{p_{i,i+1}(t)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{\mathbf{P}(X(t) = 1)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{\lambda t + o(t)}{t} = \lambda.$$

Ha $j > i + 1$, akkor

$$0 \leq q_{ij} = \lim_{t \to 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t} \leq \lim_{t \to 0+} \frac{\mathbf{P}(X(t) \geq 2)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{o(t)}{t} = 0.$$

Ha $j < i$, akkor $p_{ij}(t) \equiv 0$, azaz $q_{ij} = 0$. Tehát a rátamátrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy a rátamátrix bármely sorában az elemek összege 0. Általában ez nem igaz minden Markov-láncra, ugyanis

$$\sum_{j \in S} q_{ij} = \sum_{j \in S} \lim_{t \to 0+} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t} \neq \lim_{t \to 0+} \frac{\sum\limits_{j \in S} p_{ij}(t) - \sum\limits_{j \in S} \delta_{ij}}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{1 - 1}{t} = 0.$$

A probléma gyökere abból ered, hogy a végtelen összegzés és a határérték-képzés nem cserélhető fel mindig. Mostantól feltesszük, hogy a Markov-láncra teljesülnek a

$$\sum_{j\in S} q_{ij} = 0 \quad (i \in S) \tag{3.24}$$

egyenletek. (Ebből következik, hogy $q_{ii} > -\infty$.)

3.10. tétel. *Ha a Markov-láncra teljesül (3.24), akkor*

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in S} q_{ik} p_{kj}(t),$$

mátrixos alakban

$$\mathbf{\Pi}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{\Pi}(t).$$

BIZONYÍTÁS:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Pi}'(t) &= \lim_{s\to 0+} \frac{\mathbf{\Pi}(t+s) - \mathbf{\Pi}(t)}{s} = \\
&= \lim_{s\to 0+} \frac{\mathbf{\Pi}(s)\mathbf{\Pi}(t) - \mathbf{\Pi}(t)}{s} = \\
&= \lim_{s\to 0+} \left(\frac{\mathbf{\Pi}(s) - \mathbf{E}}{s} \mathbf{\Pi}(t) \right) = \\
&= \left(\lim_{s\to 0+} \frac{\mathbf{\Pi}(s) - \mathbf{E}}{s} \right) \mathbf{\Pi}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{\Pi}(t),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

ahol **E**-vel az egységmátrixot jelöltük, és a (3.25) lépésben az összegzés és a határérték-képzés felcserélhetősége a (3.24) egyenlőségből következik, de ennek igazolásától eltekintünk. ■

A rátamátrix jelentőségét újabb oldalról világítja meg a következő gondolatmenet. (3.23) alapján

$$q_{ij}t - p_{ij}(t) + \delta_{ij} = o(t),$$

amiből

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X(t) = j \mid X(0) = i) &= p_{ij}(t) = q_{ij}t + o(t) \quad (i \neq j), \\
\mathbf{P}(X(t) \neq i \mid X(0) = i) &= 1 - p_{ii}(t) = -q_{ii}t + o(t), \\
\mathbf{P}(X(t) = i \mid X(0) = i) &= p_{ii}(t) = 1 + q_{ii}t + o(t).
\end{aligned}$$

Hasonlóan a Poisson-folyamathoz, általános Markov-láncok esetén is az i állapotból a $j \neq i$ állapotba t idő alatt való átmenet valószínűsége kis t-re közel arányos t-vel, és az arányossági tényező éppen q_{ij}.

Korábban láttuk, hogy Poisson-folyamat esetén az egyes pontok távolságai független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítás nélkül közöljük, hogy Markov-láncok esetén az i állapotban eltöltött idő $-q_{ii}$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó és a lánc i-ből $j \neq i$-be éppen $\frac{q_{ij}}{-q_{ii}}$ valószínűséggel lép. A Markov-tulajdonság alapján az állapottartási idők függetlenek.

3.4.2. Véges állapotú folytonos idejű Markov-láncok stabilitása

Ebben a pontban feltesszük, hogy a Markov-lánc állapotainak száma $N+1$, és jelöljük ezeket $0,1,\ldots,N$-nel. A láncot stabilnak nevezzük, ha létezik a határeloszlása és független a kezdeti eloszlástól, azaz minden $i,j \in S$-re

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j$$

és

$$\sum_{i=0}^{N} p_i = 1.$$

3.6. definíció. *Az $X(t)$ Markov-láncot* irreducíbilis*nek nevezzük, ha minden $i,j \in S$-hez létezik $t_{ij} > 0$, hogy $p_{ij}(t_{ij}) > 0$.*

3.11. tétel. *Ha az $X(t)$ véges állapotú Markov-lánc irreducíbilis, akkor létezik $t_0 > 0$ úgy, hogy minden $i,j \in S$-re $p_{ij}(t_0) > 0$.*

BIZONYÍTÁS: Az irreducibilitás miatt minden $i,j \in S$-re létezik $t_{ij} > 0$ úgy, hogy $p_{ij}(t_{ij}) > 0$, és ekkor $t > t_{ij}$-re

$$p_{ij}(t) \geq p_{ij}(t_{ij})p_{jj}(t-t_{ij}) > 0$$

a 3.1. lemma miatt. Tehát $t_0 = \max_{i,j\in S} t_{ij}$ választással készen vagyunk. ∎

3.12. tétel. *Ha az $X(t)$ véges állapotú Markov-lánc esetén létezik $t_0 > 0$ úgy, hogy minden $i,j \in S$-re $p_{ij}(t_0) > 0$, akkor a lánc stabil.*

BIZONYÍTÁS: Az $\mathcal{X} = \{X_n\}$ diszkrét idejű folyamatot definiáljuk az

$$X_n = X(nt_0)$$

képlettel. X_n állapottere S és Markov-lánc, hiszen

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1},\ldots,X_0 = x_0) = \\
&= \mathbf{P}(X(nt_0) = x_n \mid X((n-1)t_0) = x_{n-1},\ldots,X(0) = x_0) = \\
&= \mathbf{P}(X(nt_0) = x_n \mid X((n-1)t_0) = x_{n-1}) = \\
&= \mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Az 1.2. lemma alapján X_n stabil, hiszen $p_{ij}^{(1)} > 0$ minden $i, j \in S$-re, így létezik $p_0, \dots, p_N$ úgy, hogy

$$\sum_{i=0}^{N} p_i = 1$$

és minden $i, j \in S$-re

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j,$$

azaz a folytonos idejű láncra

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(nt_0) = p_j.$$

Becsüljük meg a $p_{ij}(t)$ és p_j eltérését! Legyen t olyan, hogy $nt_0 \le t < (n+1)t_0$, ekkor

$$\begin{aligned}
|p_{ij}(t) - p_j| &= \left| \sum_{k=0}^{N} p_{ik}(t-nt_0) p_{kj}(nt_0) - p_j \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{N} p_{ik}(t-nt_0) \left(p_{kj}(nt_0) - p_j\right) \right| \le \\
&\le \sum_{k=0}^{N} p_{ik}(t-nt_0) \left| p_{kj}(nt_0) - p_j \right| \le \\
&\le \max_{0\le k\le N} \left| p_{kj}(nt_0) - p_j \right|,
\end{aligned}$$

ami tart 0-hoz, ha n tart ∞-hez. Tehát minden $i, j \in S$-re

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j,$$

így a lánc stabil. ■

Előző eredményeinket a következő tételben foglaljuk össze:

3.13. tétel. *Folytonos idejű, véges állapotú, irreducíbilis Markov-lánc stabil.*

A határeloszlás kiszámítására több lehetőségünk is van.

3.14. tétel. *Ha $P = \{p_j\}$ egy véges állapotú, stabil Markov-lánc határeloszlása, akkor minden $t \ge 0$-ra*

$$P = P\mathbf{\Pi}(t).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $s > t$. Ekkor

$$\begin{aligned} p_i &= \lim_{s\to\infty} p_{ki}(s) = \lim_{s\to\infty} \sum_{j=0}^{N} p_{kj}(s-t)p_{ji}(t) = \\ &= \sum_{j=0}^{N} \left(\lim_{s\to\infty} p_{kj}(s-t)\right) p_{ji}(t) = \sum_{j=0}^{N} p_j p_{ji}(t). \end{aligned}$$

■

3.15. tétel. *Ha $P = \{p_j\}$ egy véges állapotú, stabil Markov-lánc határeloszlása, akkor*

$$P\mathbf{Q} = 0,$$

ahol 0 *a nullvektort jelöli.*

BIZONYÍTÁS: Az előző tétel eredménye alapján

$$p_j = \sum_{k=0,k\neq j}^{N} p_k p_{kj}(t) + p_j p_{jj}(t).$$

Átrendezve és t-vel osztva kapjuk, hogy

$$-p_j \frac{p_{jj}(t) - p_{jj}(0)}{t} = \sum_{k=0,k\neq j}^{N} p_k \frac{p_{kj}(t) - p_{kj}(0)}{t}.$$

$t \to 0+$ esetén ebből

$$-p_j q_{jj} = \sum_{k=0,k\neq j}^{N} p_k q_{kj},$$

azaz

$$\sum_{k=0}^{N} p_k q_{kj} = 0.$$

■

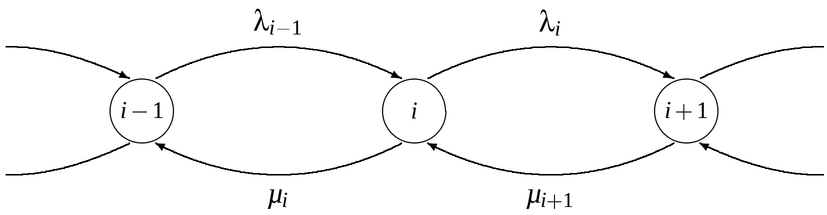
Megjegyezzük még, hogy véges állapottér esetén $q_{ii} > -\infty$, továbbá mindig igaz, hogy

$$P'(t) = \mathbf{Q}P(t) = P(t)\mathbf{Q}.$$

Ez utóbbi differenciálegyenlet-rendszer megoldása

$$P(t) = e^{\mathbf{Q}t} = \mathbf{E} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^n t^n}{n!}$$

alakú. Ezeket az állításokat itt nem bizonyítjuk.



3.4. ábra. Születési és halálozási folyamat

3.4.3. Születési és halálozási folyamatok

A születési és halálozási folyamatok olyan folytonos idejű Markov-láncok, melyeknél állapotátmenet csak a szomszédos állapotokba történhet. Az ilyen folyamatok felfoghatók a számegyenesen való bolyongások folytonos idejű általánosításaiként: egyrészt állapotátmenetek tetszőleges időpontban történhetnek, másrészt a jobbra, illetve balra lépés valószínűsége függhet attól, hogy éppen melyik állapotban vagyunk. Ezen folyamatok külön tárgyalását a sorbanállási rendszerekben játszott fontos szerepük indokolja.

3.7. definíció. *Egy* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Markov-láncot* születési és halálozási folyamat*nak nevezünk (3.4. ábra), ha*

1. $p_{ij}(0) = \lim\limits_{t\to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij} \quad (i, j \in S)$;
2. $p_{i,i+1}(t) = \lambda_i t + o(t) \quad (i \in S)$;
3. $p_{i,i-1}(t) = \mu_i t + o(t) \quad (i \in S - \{0\})$;
4. $p_{i,i}(t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)t + o(t) \quad (i \in S)$;
5. $\mu_0 = 0$ *és létezik* k *illetve* l *úgy, hogy* $\lambda_k > 0$ *és* $\mu_l > 0$.

Ha minden i*-re* $\mu_i = 0$*, akkor tiszta születési, ha pedig minden* i*-re* $\lambda_i = 0$*, akkor tiszta halálozási folyamatról beszélünk.*

A Poisson-folyamatokra vonatkozó sűrűségi és ritkasági feltétel (3.4. tétel) alapján látszik, hogy a Poisson-folyamatok például tiszta születési folyamatok, ahol rádásul $\lambda_i = \lambda$ minden i-re.

Számunkra az irreducíbilis születési és halálozási folyamatok lesznek érdekesek, tehát a továbbiakban feltesszük, hogy

$$\lambda_i > 0 \quad (i \in S)$$

és

$$\mu_i > 0 \quad (i \in S - \{0\}).$$

Bizonyos technikai nehézségek elkerülése érdekében kikötjük még azt is, hogy

$$\sup_{i\in S}(\lambda_i+\mu_i)<\infty.$$

Ez az általunk vizsgált esetekben nem lényeges megszorítás.

Születési és halálozási folyamatokra természetesen érvényesek a folytonos idejű Markov-láncokról mondottak, például a rátamátrix

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

alakú. Bevezetve a $P_i(t)=\mathbf{P}(X(t)=i)$ jelölést, a Poisson-folyamatnál látott módon (lásd a (3.11) egyenletet) kaphatjuk a

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda_0P_0(t)+\mu_1P_1(t) \\ P_i'(t) &= \lambda_{i-1}P_{i-1}(t)-(\lambda_i+\mu_i)P_i(t)+\mu_{i+1}P_{i+1}(t) \quad (i\geq 1) \end{aligned} \tag{3.26}$$

differenciálegyenlet-rendszert, melynek kezdeti feltételeit a kezdeti eloszlás határozza meg.

Bennünket elsősorban az érdekel, hogyan viselkednek a $P_i(t)$ függvények $t\to\infty$ esetén. Legyen

$$\pi_0=1,\quad \pi_i=\frac{\lambda_0\cdot\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\cdot\mu_2\cdots\mu_i}\ (i\geq 1).$$

Irreducíbilis folytonos idejű Markov-láncnál a stabilitáshoz elegendő a pozitív visszatérőség. A folyamatot mintavételezve a Foster-kritérium segítségével megmutatható, hogy irreducíbilis születési és halálozási folyamat esetén

$$\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i<\infty \tag{3.27}$$

a stabilitás elégséges feltétele. Ekkor a diszkrét idejű esethez hasonlóan

$$\lim_{t\to\infty}P_i(t)=p_i>0 \quad (i\in S)$$

a kezdeti eloszlástól függetlenül. A (3.26) egyenletekben határértéket véve, a $\lim_{t\to\infty}P_i'(t)$ mennyiséget nullának tekinthetjük, és így a $\{p_i\}$ stacionárius eloszlást a

$$\begin{aligned} \lambda_0p_0 &= \mu_1p_1 \\ \lambda_{i-1}p_{i-1}+\mu_{i+1}p_{i+1} &= (\lambda_i+\mu_i)p_i \quad (i\geq 1) \\ \sum_{i=0}^{\infty}p_i &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer egyértelmű megoldásaként kaphatjuk meg. Az egyenletrendszerhez úgy is eljuthatunk, ha meggondoljuk, hogy minden állapotra teljesülnie kell annak, hogy a befolyó intenzitások összege egyenlő a kifolyó intenzitások összegével.

Megjegyezzük, hogy ez az egyenletrendszer a

$$P\mathbf{Q} = 0$$

egyenletből is következik, amit véges állapottér esetén bebizonyítottunk.

A határeloszlást ki is számolhatjuk, hiszen

$$p_1 = p_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1} = p_0 \pi_1,$$

és teljes indukcióval

$$p_i = p_0 \pi_i \quad (i \in S), \tag{3.28}$$

továbbá a normalizáló egyenletből

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} \pi_i}. \tag{3.29}$$

Vegyük észre, hogy ha a folyamat állapotai $0, 1, \ldots, N-1$ és a lánc irreducíbilis, akkor stabil. Ez esetben legyen $\pi_0, \ldots, \pi_{N-1}$ az előzőleg definiált és $\pi_N = \pi_{N+1} = \cdots = 0$. Ekkor a 3.15. tétel alapján a határeloszlásra éppen a fenti egyenletrendszert kapjuk.

Születési és halálozási folyamatok esetén az i állapot tartási ideje $\lambda_i + \mu_i$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, és az $i \to i+1$ átmenet valószínűsége $\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$, az $i \to i-1$ átmeneté pedig $\frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$.

3.5. Feladatok

3.1. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a Poisson-folyamat véges dimenziós eloszlásai a következőképpen adhatók meg: ha* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *és* $0 \le k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_n$*, akkor*

$$\mathbf{P}(X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2, \ldots, X(t_n) = k_n) =$$
$$= \lambda^{k_n} \cdot \frac{{t_1}^{k_1}}{k_1!} \left(\prod_{i=2}^{n} \frac{(t_i - t_{i-1})^{k_i - k_{i-1}}}{(k_i - k_{i-1})!} \right) e^{-\lambda t_n} \;\; !$$

3.2. feladat. *Legyen* $\{N(t), t \geq 0\}$ *egy* λ *intenzitású Poisson-folyamat. Számítsuk ki a* $\mathbf{E}(N(t)N(t+s))$ *mennyiséget!*

3.3. feladat. *Igazoljuk, hogy a Poisson-folyamat kovariancia-függvénye*

$$\mathrm{R}(s,t) = \lambda \min(s,t) \quad (s,t \geq 0)$$

alakú! Ebből következik, hogy

$$\sigma^2(X(t)) = \mathrm{cov}(X(t), X(t)) = \mathrm{R}(t,t) = \lambda t,$$

amit a Poisson-eloszlás szórásnégyzetének képlete alapján már előre tudhattunk.

3.4. feladat. *Legyen* U *a* $(0,1)$*-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó és* $\lambda > 0$*. Bizonyítsuk be, hogy az* $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ *eloszlása* λ *paraméterű exponenciális!*

3.5. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy homogén Poisson-folyamat esetén a pontok távolságai független,* λ *paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók!*

3.6. feladat. *Mutassuk meg, hogy a* k*-adrendű gamma-eloszlás*

$$f_k(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0).$$

sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja

$$\frac{\lambda^k}{(s+\lambda)^k}.$$

3.7. feladat. *Lássuk be a következőket:*

1. $t \neq o(t)$;
2. $t^2 = o(t)$;
3. $ct^r = o(t)$, *ha* $r > 1$ *és* c *konstans;*
4. *ha* $f(t) = o(t)$ *és* $g(t) = o(t)$, *akkor* $f(t) \pm g(t) = o(t)$;
5. *ha* $f(t) = o(t)$ *és* c *konstans, akkor* $cf(t) = o(t)$;
6. *ha* $f(t) = o(ct)$ *és* $c \neq 0$ *konstans, akkor* $f(t) = o(t)$;
7. *ha* $f(t) = o(t)$, *akkor* $\lim\limits_{t \to 0+} f(t) = 0$;
8. *ha* $f(t) = o(t)$ *és* $g(t) = o(t)$, *akkor* $f(t) \cdot g(t) = o(t)$;

9. *ha* $0 \le f(t) \le g(t)$ *és* $g(t) = o(t)$*, akkor* $f(t) = o(t)$*;*
10. *ha* $f(t) = o\left(t^2\right)$*, akkor* $f(t) = o(t)$*;*
11. *ha* $f(t) = o(t)$*, akkor* $t f(t) = o(t)$*.*

3.8. feladat. *Igazoljuk, hogy*

$$e^{-x} = 1 - x + o(x)!$$

3.9. feladat. *Mutassuk meg, hogy bármely bináris fában a levelek száma pontosan eggyel több, mint a belső pontok száma (a gyökeret is beleszámolva)!*

3.10. feladat. *Mutassuk meg, hogy a Poisson-folyamat kielégíti a (3.21) képletet!*

3.11. feladat. *Tegyük fel, hogy bizonyos események* λ *intenzitású Poisson-folyamat szerint generálódnak. A feladatunk az, hogy számoljuk a jelen időpontig bekövetkezett események számát. Azonban minden egyes bekövetkezett eseményt csak* p *valószínűséggel veszünk észre és számolunk meg. Bizonyítsuk be, hogy ez a számoló folyamat Poisson-folyamat* λp *intenzitással!*

3.12. feladat. *Legyen* $\{N_1(t), t \ge 0\}$ *és* $\{N_2(t), t \ge 0\}$ *két független Poisson-folyamat* λ_1 *és* λ_2 *intenzitásokkal. Mutassuk meg, hogy* $\{N_1(t) + N_2(t), t \ge 0\}$ *is egy Poisson-folyamat* $\lambda_1 + \lambda_2$ *intenzitással.*
Bizonyítsuk be azt is, hogy annak a valószínűsége, hogy az $\{N_1(t) + N_2(t), t \ge 0\}$ *összetett folyamat első bekövetkező eseménye* $\{N_1(t), t \ge 0\}$*-től származik* $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$*.*

3.13. feladat. *A 3.12. feladatban add meg annak a valószínűséget, hogy* $N_1(t)$ *eléri* n*-et mielőtt még* $N_2(t)$ *elérné* m*-et!*

3.14. feladat. *Legyen* $\{N(t), t \ge 0\}$ *egy* λ *intenzitású Poisson-folyamat és* Y *legyen egy pozitív,* $\{N(t), t \ge 0\}$*-től független valószínűségi változó. Számítsuk ki* $\mathbf{E}(N(Y))$ *és* $\sigma^2(N(Y))$ *mennyiségeket!*

3.15. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden független növekményű folyamat Markov-folyamat!*

3.16. feladat. *Legyen* $Y_{1,n}, Y_{2,n}, \ldots, Y_{n,n}$ n *független a* $(0,t)$ *intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Legyen* $Z_n = \min(Y_{1,n}, Y_{2,n}, \ldots, Y_{n,n})$*.*

a) *Adjuk meg a* $\mathbf{P}(Z_n > x)$ *valószínűséget!*

b) *Legyen* t *egy függvénye* n*-nek, úgy hogy* $\lim\limits_{n\to\infty} n/t = \lambda$*. Bizonyítsuk be, hogy* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n > x) = e^{-\lambda x}$*.*

4. fejezet

Folytonos idejű sorbanállási modellek

A sorbanállási rendszerek fogalmát a diszkrét idejű folyamatoknál már bevezettük. Ebben a fejezetben olyan tömegkiszolgálási rendszerekkel foglalkozunk, ahol az igények tetszőleges időpillanatban érkezhetnek, illetve kiszolgálásuk is bármelyik időpillanatban befejeződhet. Sorbanállási rendszerek leírásához meg kell adnunk a sztochasztikus folyamatot, amely szerint az igények beérkeznek, illetve a kiszolgálásra vonatkozó adatokat, vagyis a kiszolgáló egységek számát és a kiszolgálási idő eloszlását. Általában feltesszük, hogy az egyes igények kiszolgálási idői egymástól és az érkezési folyamattól függetlenek, eloszlásuk megegyezik, valamint az igények érkezései között eltelt idő független és azonos eloszlású.

4.1. definíció. *Egy pontfolyamatot* felújítási folyamat*nak nevezünk, ha a szomszédos pontok közötti távolságok független, azonos eloszlású, de egyébként tetszőleges valószínűségi változók.*

Tehát az igényforrásoktól a kiszolgáló rendszerhez az igények egy felújítási folyamat szerint érkeznek. Például a Poisson-folyamat olyan felújítási folyamat, amelynél a pontok távolságai λ paraméterű exponenciálisok.

A sorbanállási rendszerek legfontosabb jellemzőit röviden egy kódrendszerrel specifikálhatjuk (Kendall-féle jelölés):

$$A/B/m/K/M,$$

ahol

A - a szomszédos igények beérkezései között eltelt idő (a fentiek értelmében közös) eloszlásának kódja;

B - a kiszolgálási idő eloszlásának kódja;

m - a rendszerben lévő kiszolgáló egységek száma;

K - a rendszer befogadóképessége, azaz a kiszolgálókban és a várakozási sorban tartózkodó igények számának maximuma, alapértelmezésben végtelen;

M - az igényforrások száma, a mi eseteinkben mindig végtelen,

továbbá A és B lehetséges értékei:

M - emlékezetnélküli vagy Markovi, azaz exponenciális eloszlás;

D - determinisztikus, azaz konstans (egy pontra koncentrálódó) eloszlás;

G - általános (tetszőleges) eloszlás.

Vezessük még be a kihasználtsági tényező fogalmát

$$\rho = \frac{\text{beérkezési intenzitás}}{\text{kiszolgálási intenzitás}} = \frac{1/\text{érkezési idő várható értéke}}{1/\text{kiszolgálási idő várható értéke}}.$$

A továbbiakban két egyszerű példa bemutatása után, először leírjuk a rendszer viselkedését exponenciális, majd átalános kiszolgálási idők mellett abban az esetben, ha az igények Poisson-folyamat szerint érkeznek. Végül tetszőleges érkezési folyamat esetén vizsgáljuk előbb az exponenciális, majd az általános kiszolgálási idejű rendszert.

4.1. Veszteséges kiszolgálás

Születési és halálozási folyamatok sorbanállási alkalmazására első egyszerű példánk a veszteséges kiszolgálás. Ekkor a véges (N) hosszú sorral rendelkező kiszolgálóhoz λ intenzitású Poisson-folyamat szerint érkeznek az igények, és ha egy új igény a sort megtelve találja, akkor elvész. Az igények kiszolgálási idői μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melyek függetlenek egymástól és az érkezési folyamattól. A fent bevezetett kódrendszer alapján a veszteséges kiszolgáló rendszer kódja M/M/1/$(N+1)$, hiszen a sor N hosszú lehet és még egy igény tartózkodhat a kiszolgálóban. Jelölje $N(t)$ a sorhosszt a t időpontban. Ekkor belátható, hogy $N(t)$ folytonos idejű homogén Markov-lánc. Az állapotátmenet-valószínűségekre a következőket írhatjuk:

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(\Delta) &= \mathbf{P}(N(t+\Delta) = i+1 \mid N(t) = i) = \\ &= \mathbf{P}(\Delta \text{ idő alatt eggyel több igény érkezik, mint amennyi} \\ &\qquad \text{kiszolgálódik}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P}(\Delta \text{ idő alatt 1 igény érkezik és egy sem szolgálódik ki}) + \\
&\quad + \mathbf{P}(\Delta \text{ idő alatt legalább két igény érkezik és eggyel} \\
&\qquad \text{kevesebb szolgálódik ki}) = \\
&= [\lambda\Delta + o(\Delta)]e^{-\mu\Delta} + o(\Delta) = \\
&= [\lambda\Delta + o(\Delta)][1 - \mu\Delta + o(\Delta)] + o(\Delta) = \\
&= \lambda\Delta + o(\Delta) \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1),
\end{aligned}$$

és hasonlóan

$$p_{i,i-1}(\Delta) = \mu\Delta + o(\Delta) \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

illetve

$$p_{ii}(\Delta) = 1 - (\lambda + \mu)\Delta + o(\Delta) \quad (i = 2, 3, \ldots, N-1),$$

továbbá

$$\begin{aligned}
p_{0,0}(\Delta) &= 1 - \lambda\Delta + o(\Delta), \\
p_{N,N}(\Delta) &= 1 - \mu\Delta + o(\Delta).
\end{aligned}$$

A fentiekből következik, hogy $N(t)$ véges állapotú születési és halálozási folyamat $\lambda_i = \lambda$ $(i = 0, \ldots, N-1)$ és $\mu_i = \mu$ $(i = 1, \ldots, N)$ paraméterekkel. Az $N(t)$ lánc stabil, mivel irreducíbilis és véges állapotú, és határeloszlása (3.28) és (3.29) miatt

$$p_i = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(N(t) = i) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{\sum_{j=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j} = \frac{\rho^i}{\sum_{j=0}^{N} \rho^j} \quad (i = 0, 1, \ldots, N),$$

ahol $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ a kihasználtsági tényező. A fenti eloszlás $\rho < 1$ esetén megegyezik a $\{0, 1, \ldots, N\}$-re csonkított, $(1-\rho)$ paraméterű, eredetileg a $\{0, 1, \ldots\}$ halmazra koncentrálódó geometriai eloszlással. Stacionárius állapotban annak a valószínűsége, hogy egy igény elveszik, éppen

$$p_N = \frac{\rho^N}{\sum_{j=0}^{N} \rho^j}.$$

4.2. Az Erlang-probléma

Az első sorbanállási feladatok a telefonközpont feltalálása után fogalmazódtak meg. Az Erlang-probléma a mi modellünkben leírva a következő. Az igények λ intenzitású Poisson-folyamat szerint érkeznek egy N kiszolgálóból álló rendszerbe, ahol nincsenek sorok, tehát ha egy igény nem talál szabad kiszolgálót, akkor elvész. Az igények kiszolgálási idői μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melyek függetlenek egymástól és az érkezési folyamattól. Telefonközpont esetén például az igények a hívásoknak, a kiszolgálók az egyes vonalaknak felelnek meg. A fejezet elején bevezetett kódrendszer szerint az Erlang-probléma kódja M/M/N/N.

Jelölje $N(t)$ a t időpontban foglalt kiszolgálók számát. Belátható, hogy $N(t)$ folytonos idejű homogén Markov-lánc. Az állapotátmenet-valószínűségekre a következőket írhatjuk:

$$\begin{aligned}
p_{i,i+1}(\Delta) &= \mathbf{P}(N(t+\Delta) = i+1 \mid N(t) = i) = \\
&= \mathbf{P}\,(\Delta \text{ idő alatt eggyel több igény érkezik, mint amennyi} \\
&\qquad \text{kiszolgálódik}) = \\
&= \mathbf{P}(\Delta \text{ idő alatt 1 igény érkezik és egy sem szolgálódik ki}) + \\
&\quad + \mathbf{P}\,(\Delta \text{ idő alatt legalább két igény érkezik és eggyel} \\
&\qquad \text{kevesebb szolgálódik ki}) = \\
&= [\lambda\Delta + o(\Delta)]\left(e^{-\mu\Delta}\right)^i + o(\Delta) = \\
&= \lambda\Delta + o(\Delta) \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1),
\end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned}
p_{i,i-1}(\Delta) &= \mathbf{P}(N(t+\Delta) = i-1 \mid N(t) = i) = \\
&= \mathbf{P}\,(\Delta \text{ idő alatt eggyel kevesebb igény érkezik, mint amennyi} \\
&\qquad \text{kiszolgálódik}) = \\
&= \mathbf{P}(\Delta \text{ idő alatt 0 igény érkezik és egy szolgálódik ki}) + \\
&\quad + \mathbf{P}\,(\Delta \text{ idő alatt legalább két igény szolgálódik ki és} \\
&\qquad \text{eggyel kevesebb érkezik}) = \\
&= [1 - \lambda\Delta + o(\Delta)] \cdot i \cdot \left(1 - e^{-\mu\Delta}\right)\left(e^{-\mu\Delta}\right)^{i-1} + o(\Delta) = \\
&= i\mu\Delta + o(\Delta) \quad (i = 1, \ldots, N),
\end{aligned}$$

illetve

$$p_{ii}(\Delta) = 1 - (\lambda + i\mu)\Delta + o(\Delta) \quad (i = 2, 3, \ldots, N-1),$$

továbbá

$$\begin{aligned}
p_{0,0}(\Delta) &= 1 - \lambda\Delta + o(\Delta), \\
p_{N,N}(\Delta) &= 1 - N\mu\Delta + o(\Delta).
\end{aligned}$$

A fentiek alapján $N(t)$ véges állapotú születési és halálozási folyamat $\lambda_i = \lambda$ $(i = 0,\dots,N-1)$ és $\mu_i = i\mu$ $(i = 1,\dots,N)$ paraméterekkel. Az $N(t)$ lánc stabil és határeloszlása (3.28) és (3.29) alapján

$$p_i = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(N(t) = i) = \frac{\frac{\rho^i}{i!}}{\sum\limits_{j=0}^{N} \frac{\rho^j}{j!}} \quad (i = 0,1,\dots,N),$$

ahol $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ a kihasználtsági tényező. Az eloszlás megegyezik a $\{0,1,\dots,N\}$-re csonkított, ρ paraméterű Poisson-eloszlással. Stacionárius állapotban annak a valószínűsége, hogy nincs szabad kiszolgáló, éppen

$$p_N = \frac{\frac{\rho^N}{N!}}{\sum\limits_{j=0}^{N} \frac{\rho^j}{j!}}.$$

4.3. Az M/M/1 rendszer sorhossza

Az érkezési folyamat továbbra is legyen λ intenzitású Poisson-folyamat, a kiszolgálási idők μ paraméterű exponenciálisok, egy kiszolgáló egységünk van, de a várakozási sor hossza tetszőlegesen nagy lehet, azaz $K = \infty$.

Jelölje $N(t)$ a t időpontban a rendszerben tartózkodó (kiszolgálás alatt lévő vagy sorbanálló) igények számát. Ekkor az előző példákhoz hasonlóan $N(t)$ folytonos idejű homogén Markov-lánc. Az állapotátmenet-valószínűségekre a veszteséges kiszolgálásnál látott módon kaphatjuk, hogy

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(\Delta) &= \lambda\Delta + o(\Delta) \quad (i = 0,1,\dots), \\ p_{i,i-1}(\Delta) &= \mu\Delta + o(\Delta) \quad (i = 1,2,\dots), \\ p_{ii}(\Delta) &= 1-(\lambda+\mu)\Delta + o(\Delta) \quad (i = 1,2,\dots), \\ p_{0,0}(\Delta) &= 1-\lambda\Delta + o(\Delta), \end{aligned}$$

tehát $N(t)$ végtelen állapotú születési és halálozási folyamat $\lambda_i = \lambda$ $(i = 0,1,\dots)$ és $\mu_i = \mu$ $(i = 1,2,\dots)$ paraméterekkel. Az átmenetvalószínűségek megegyeznek a veszteséges kiszolgálás esetén kapottakkal, a különbség a két rendszer között csak az, hogy most nincs korlát a sorhosszra. A lánc irreducíbilis és mivel

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \quad (i \in S),$$

azért (3.27) alapján stabil, ha a kihasználtsági tényező

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1,$$

azaz

$$\lambda < \mu.$$

Ez nem meglepő, hiszen azt jelenti, hogy a stabilitáshoz a kiszolgálási idő $(1/\mu)$ várható értékének kisebbnek kell lennie, mint az érkezések között eltelt idő várható értéke, azaz $(1/\lambda)$. A határeloszlás $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ bevezetésével (3.28) és (3.29) miatt

$$p_i = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(N(t) = i) = p_0\rho^i \quad (i = 0, 1, \ldots),$$

ahol

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} \rho^j} = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} = 1 - \rho,$$

és így

$$p_i = (1-\rho)\rho^i \quad (i \in S).$$

A határeloszlás tehát $(1-\rho)$ paraméterű, a $\{0, 1, \ldots\}$ halmazra koncentrált geometriai eloszlás, melynek várható értéke, azaz stacionárius esetben a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^{\infty} i\, p_i = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}. \tag{4.1}$$

4.4. Az M/M/1 rendszer késleltetése

Most meghatározzuk az egy igény által a rendszerben eltöltött idő várható értékét, azaz az átlagos késleltetést stacionárius állapotban. Tegyük fel, hogy egy új igény a t időpillanatban érkezik, ekkor a rendszerben $N(t)$ igény tartózkodik. FCFS kiszolgálási eljárást feltételezve az új igénynek ki kell várnia az összes előtte lévő igény kiszolgálását. Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága miatt a t időpontban kiszolgálás alatt lévő igény (ha van ilyen) kiszolgálásából hátramaradt idő is μ paraméterű exponenciális eloszlású, továbbá minden várakozó igény és az új igény kiszolgálási ideje is μ paraméterű exponenciális, ezért az új igény teljes késleltetése

$$D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i + Y, \tag{4.2}$$

ahol $Y_1,\dots,Y_{N(t)}$ és Y egymástól független, μ paraméterű exponenciálisok. Stacionárius állapotban $N(t)$ eloszlása nem függ t-től, tehát $D(t)$ eloszlása sem függ t-től, azaz $\mathbf{E}(D(t))=\bar{D}$. $\bar{D}$ meghatározásához az alábbi lemma alkalmazásával juthatunk el:

4.1. lemma (Wald-egyenlőség). *Ha N nemnegatív, egész értékű valószínűségi változó és $\{Y_i\}$ független, nemnegatív értékű, azonos eloszlású sorozat, amely független N-től, akkor*
$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)=\mathbf{E}(Y_1)\mathbf{E}(N).$$

BIZONYÍTÁS:
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) &= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} Y_i \mathrm{I}_{\{i\le N\}}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\big(Y_i\mathrm{I}_{\{i\le N\}}\big)=\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}(Y_i)\mathbf{E}\big(\mathrm{I}_{\{i\le N\}}\big)=\mathbf{E}(Y_1)\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{P}(N\ge i)=\\
&= \mathbf{E}(Y_1)\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\mathbf{P}(N=k)=\mathbf{E}(Y_1)\mathbf{E}(N).
\end{aligned}$$
■

Ebből (4.1) és (4.2) alapján
$$\bar{D}=\mathbf{E}(Y_1)\cdot\bar{N}+\mathbf{E}(Y)=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\lambda}{\mu-\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu-\lambda}.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk az első fejezet végén a késleltetésre bevezetett Little-formulából is (lásd a 4.1. feladatot).

Stacionárius állapotban $D(t)\equiv D$ eloszlását is meghatározhatjuk, hiszen
$$\mathbf{P}(D<d)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{P}(D<d\mid N(t)=i)\cdot\mathbf{P}(N(t)=i),$$
ahol D az $\{N(t)=i\}$ feltétel mellett (4.2) miatt $(i+1)$ darab független, μ paraméterű exponenciálisú valószínűségi változó összege. Tehát a késleltetés eloszlása $i+1$ darab exponenciális eloszlás konvolúciója, amiről a 3.3. tétel bizonyításában beláttuk, hogy az $(i+1)$-edrendű, μ paraméterű gamma-eloszlás. Így
$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(D<d) &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\int_0^d \mu\frac{(\mu u)^i}{i!}e^{-\mu u}\mathrm{d}u\right)(1-\rho)\rho^i=\\
&= \int_0^d\left(\sum_{i=0}^{\infty}\mu\frac{\mu^i u^i}{i!}e^{-\mu u}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\right)\mathrm{d}u=
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\int_0^d \left(e^{-\mu u}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda u)^i}{i!}\right)\mathrm{d}u = \\
&= \mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\int_0^d e^{-\mu u}\cdot e^{\lambda u}\,\mathrm{d}u = \\
&= \mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\int_0^d e^{-(\mu-\lambda)u}\,\mathrm{d}u = \\
&= \mu\cdot\frac{\mu-\lambda}{\mu}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}\left(1-e^{-(\mu-\lambda)d}\right) = \\
&= 1-e^{-(\mu-\lambda)d} \quad (d\geq 0),
\end{aligned}
$$

tehát a késleltetés $(\mu-\lambda)$ paraméterű exponenciális eloszlású, várható értéke pedig az előbbiekkel megegyezően

$$\bar{D} = \frac{1}{\mu-\lambda}.$$

A késleltetés eloszlását a Laplace-transzformált segítségével is megkaphatjuk. Tudjuk, hogy ha $N(t)=i$, akkor a késleltetés $(i+1)$-edrendű, μ paraméterű gamma-eloszlású, aminek a Laplace-transzformáltja

$$\frac{\lambda^k}{(s+\lambda)^k}$$

(lásd a 3.6. feladatot). Tehát a késleltetés eloszlásának Laplace-transzformáltja

$$
\begin{aligned}
D(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} D(s\mid N(t)=i)\mathbf{P}(N(t)=i) = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)^{i+1}(1-\rho)\rho^i = \\
&= (1-\rho)\frac{\mu}{s+\mu}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\rho}{s+\mu}\right)^i = \\
&= (1-\rho)\frac{\mu}{s+\mu}\frac{s+\mu}{s+\mu-\mu\rho} = \\
&= \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\mu}{s+\mu-\lambda} = \\
&= \frac{\mu-\lambda}{s+\mu-\lambda}.
\end{aligned}
$$

Ez pedig éppen a $\mu-\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlás Laplace-transzformáltja.

Végezetül bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy egy stacionárius állapotban lévő M/M/1 rendszerből távozó igények távozási idői által alkotott pontfolyamat λ intenzitású Poisson-folyamat. Ez a Burke tételének hívott eredmény lehetőséget ad M/M/1-es sorokból álló úgynevezett sorbanállási hálózatok analízisére.

4.5. Az M/G/1 rendszer

Az M/G/1 rendszerbe az igények λ intenzitású Poisson-folyamat szerint érkeznek, de a kiszolgálási idők (közös) eloszlása tetszőleges nemnegatív értékű valószínűségi változó lehet.

Legyen S_n az n-edik igény kiszolgálási ideje, akkor $\{S_n\}$ független, azonos eloszlású sorozat, és egy ezekkel megegyező eloszlású valószínűségi változó legyen S. A további tárgyalás egyszerűsége érdekében fel fogjuk tenni, hogy S abszolút folytonos $b(x)$ sűrűségfüggvénnyel és harmadik momentuma véges. Vagyis

$$\mathbf{P}(S < x) = \int_0^x b(u)\,\mathrm{d}u \quad (x \geq 0).$$

Az M/G/1 sorról is feltesszük, hogy a kiszolgálási idők függetlenek az érkezési folyamattól, illetve hogy egy kiszolgáló egységünk van és tetszőleges számú igény várakozhat.

Jelölje $N(t)$ a rendszerben a t időpillanatban lévő igények számát. Az M/M/1 sortól eltérően az $\{N(t) : t \geq 0\}$ folyamat általában nem Markov-lánc, mivel a rendszer jövője t-ben nem csak $N(t)$-től függ, hanem attól is, hogy az éppen kiszolgálás alatt lévő igény kiszolgálásából mennyi idő telt már el. A kiszolgálási idő eloszlása pedig nem feltétlenül örökifjú, így a folyamat sem Markov-lánc. Ezt a problémát úgy oldhatjuk meg, hogy $N(t)$-t csak olyan időpontokban vizsgáljuk, amikor a már eltelt kiszolgálási időt egyértelműen jellemezhetjük, például amikor egy igény éppen elhagyja a rendszert (ilyenkor ugyanis a következő igény kiszolgálásából már eltelt idő 0). Ha a folyamat ezekben a „mintapontokban” aszimptotikusan ugyanúgy viselkedik, mintha az összes időpontban vizsgálnánk, akkor ez a módszer eredményes lesz.

Az előzőekhez hasonlóan legyen

$$P_i(t) = \mathbf{P}(N(t) = i) \quad (t \geq 0, i \in S),$$

és

$$p_i = \lim_{t\to\infty} P_i(t)$$

amennyiben a határérték létezik.

Egy M/G/1 rendszerben legyen X_n az n-edik igény távozásakor a sorban lévők száma és Y_n jelölje az n-edik igény kiszolgálása (egy S_n hosszú időszakasz) alatt érkezett új igények számát. A fenti gondolatmenetből intuitíven érezhető, hogy $\{X_n\}$ homogén Markov-lánc, ezt most be is bizonyítjuk. A bizonyítás kulcsa az, hogy $\{X_n\}$ eleget tesz az

$$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + Y_{n+1} = X_n - I_{\{X_n \geq 1\}} + Y_{n+1} \tag{4.3}$$

evolúciós egyenletnek (lásd a 4.2. feladatot). De (4.3) speciális esete a (2.1) egyenletnek, így állításunk igazolásához már csak azt kell megmutatni, hogy $\{Y_n\}$ független és azonos eloszlású, ami következik $\{S_n\}$ ezen tulajdonságából valamint a Poisson-folyamat független és stacionárius növekményűségéből.

Így tehát ugyan az M/G/1 rendszer esetében az $N(t)$ folyamat általában nem Markov-lánc, de ha csak egy-egy igény távozásakor nézzük a sorhosszat, akkor tudunk találni egy diszkrét idejű beágyazott Markov-láncot. Bizonyítás nélkül közöljük, hogy ha $\{X_n\}$ stabil és a határeloszlása $\{q_0, q_1, \ldots\}$, akkor az $N(t)$ folyamatnak is létezik a $\{p_0, p_1, \ldots\}$ határeloszlása és

$$p_i = q_i$$

minden i-re.

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen a $b(x)$ sűrűségfüggvény Laplace-transzformáltja

$$B(s) = \int_0^\infty b(x) e^{-sx} \,\mathrm{d}x,$$

S várható értéke

$$\tau = \int_0^\infty x\, b(x) \,\mathrm{d}x,$$

második momentuma

$$\tau_2 = \int_0^\infty x^2 b(x) \,\mathrm{d}x$$

és szórásnégyzete

$$\sigma^2 = \tau_2 - \tau^2.$$

Definiáljuk még S relatív szórásnégyzetét, mint

$$C^2 = \frac{\sigma^2}{\tau^2}.$$

A lánc átmenetvalószínűség-mátrixa az 1.5. példa alapján

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

alakú, ahol $b_j = \mathbf{P}(Y_n = j)$ $(j = 0,1,2,\ldots)$. A b_j-ket a teljes valószínűség tételének felhasználásával kaphatjuk:

$$\begin{aligned} b_j &= \mathbf{P}(Y_n = j) = \int_0^\infty \mathbf{P}(Y_n = j \mid S_n = x) b(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} b(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{4.4}$$

hiszen az érkezési folyamat λ intenzitású Poisson-folyamat.

Az átmenetvalószínűség-mátrixból látszik, hogy a lánc irreducíbilis és aperiodikus, továbbá a 2.1. tétel miatt stabil, ha

$$\mathbf{E}(Y_n) < 1.$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_n) &= \sum_{j=0}^\infty j \cdot \mathbf{P}(Y_n = j) = \sum_{j=0}^\infty j \cdot b_j = \sum_{j=0}^\infty \left(j \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} b(x)\,\mathrm{d}x \right) = \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^\infty j \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} \right) b(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lambda x b(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\tau, \end{aligned}$$

azaz a lánc stabil, ha

$$\lambda\tau < 1.$$

Az előzőhöz hasonlóan

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(Y_n{}^2\right) &= \sum_{j=0}^\infty j^2 \cdot b_j = \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^\infty j^2 \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} \right) b(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^\infty \left(\lambda x + (\lambda x)^2\right) b(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\tau + \lambda^2\tau_2. \end{aligned}$$

Stabil esetben a S_n-ek eloszlására vonatkozó feltételek és a 2.2. tétel alapján az $\{X_n\}$ lánc határeloszlásának várható értéke

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_0') &= \frac{\mathbf{E}(Y_1)(1 - 2\mathbf{E}(Y_1)) + \mathbf{E}\left(Y_1{}^2\right)}{2(\mathbf{E}(V_1) - \mathbf{E}(Y_1))} = \\ &= \frac{\lambda\tau(1 - 2\lambda\tau) + \lambda\tau + \lambda^2\tau_2}{2(1 - \lambda\tau)} = \lambda\tau + \frac{\lambda^2\tau_2}{2(1 - \lambda\tau)}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

ami éppen az $N(t)$ határeloszlásának várható értéke, azaz a rendszerben lévők $\overline{N}$ átlagos száma egyensúlyi állapotban. A (4.5) képletet Pollaczek–Hincsin-formulának nevezzük. Esetünkben a ρ kihasználtsági tényező $\lambda\tau$-val egyenlő, így a fenti formula szokásos további alakja

$$\bar{N} = \rho + \rho^2 \cdot \frac{1+C^2}{2(1-\rho)}. \tag{4.6}$$

Az átlagos késleltetést szintén az evolúciós egyenletnél kapott képletből számolhatjuk ki azzal a különbséggel, hogy ott az átlagos kiszolgálási idő 1 időegység volt, míg itt τ, tehát az ott szereplő formulát meg kell szoroznunk τ-val:

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \frac{\mathbf{E}\left(Y_1{}^2\right) - 2\mathbf{E}(Y_1)^2 + \mathbf{E}(Y_1)}{2\mathbf{E}(Y_1)(1-\mathbf{E}(Y_1))} \cdot \tau = \frac{\lambda\tau + \lambda^2\tau_2 - 2\lambda^2\tau^2 + \lambda\tau}{2\lambda\tau(1-\lambda\tau)} \cdot \tau = \\ &= \left(1 + \frac{\lambda^2\tau_2}{2\lambda\tau(1-\lambda\tau)}\right)\tau = \tau + \rho\tau \cdot \frac{1+C^2}{2(1-\rho)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

A sorhossz határeloszlása nyilvánvalóan függ a kiszolgálási idők eloszlásától. Legyen $P(z)$ a határeloszlás generátorfüggvénye, és jelölje $P^{(n)}(z)$ az X_n generátorfüggvénye. Ekkor

$$P(z) = \lim_{n\to\infty} P^{(n)}(z).$$

X_{n+1} két független valószínűségi változó összegeként írható fel az evolúciós egyenlet alapján,

$$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + Y_{n+1} = \left(X_n - \mathrm{I}_{\{X_n \geq 1\}}\right) + Y_{n+1},$$

így generátorfüggvénye két generátorfüggvény szorzata

$$P^{(n+1)}(z) = \mathbf{E}\left(z^{X_n - \mathrm{I}_{\{X_n \geq 1\}}}\right)\mathbf{E}\left(z^{Y_n}\right). \tag{4.8}$$

A szorzat második tényezője az Y_n eloszlásának generátorfüggvénye, hiszen a generátorfüggvény nem más, mint egy várható érték, azaz Y_n generátorfüggvénye $\mathbf{E}\left(z^{Y_n}\right)$.

Y_n eloszlásának generátorfüggvénye és a kiszolgálási idő eloszlásának Laplace-transzformáltja között az alábbi összefüggést lehet felállítani:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(z^{Y_n}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} b(x)\,\mathrm{d}x\right) z^k = \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x z)^k}{k!}\right) e^{-\lambda x} b(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{\lambda x z} e^{-\lambda x} b(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^\infty e^{-(\lambda - \lambda z)x} b(x)\,\mathrm{d}x = B(\lambda - \lambda z). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Most nézzük a (4.8) kifejezés első tényezőjét:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(z^{X_n - \mathrm{I}_{\{X_n \geq 1\}}}\right) &= \mathbf{P}(X_n = 0)z^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = k)z^{k-1} = \\ &= \mathbf{P}(X_n = 0) + \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = k)z^k = \\ &= \mathbf{P}(X_n = 0) + \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = k)z^k - \frac{1}{z}\mathbf{P}(X_n = 0)z^0 = \\ &= \mathbf{P}(X_n = 0) + \frac{P^{(n)}(z) - \mathbf{P}(X_n = 0)}{z}.\end{aligned}$$

Behelyettesítve ezt és a (4.9) kifejezést a (4.8) egyenletbe

$$P^{(n+1)}(z) = \left(\mathbf{P}(X_n = 0) + \frac{P^{(n)}(z) - \mathbf{P}(X_n = 0)}{z}\right) B(\lambda - \lambda z),$$

aminek határértékét véve $n \to \infty$ esetén

$$P(z) = \left(\mathbf{P}(X_0' = 0) + \frac{P(z) - \mathbf{P}(X_0' = 0)}{z}\right) B(\lambda - \lambda z).$$

Innen z-vel szorozva és átrendezve

$$P(z) = \mathbf{P}(X_0' = 0)(z-1)\frac{B(\lambda - \lambda z)}{z - B(\lambda - \lambda z)}.$$

Az evolúciós egyenletből megkaphatjuk a határeloszlás nulladik tagját, ugyanis (2.6) alapján

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{I}_{\{X_0' \geq 1\}}\right) = \mathbf{E}(Y_1) = \lambda\tau,$$

de $\mathbf{E}\left(\mathrm{I}_{\{X_0' \geq 1\}}\right) = \mathbf{P}(X_0' \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(X_0' = 0)$. Tehát a határeloszlás generátorfüggvényére

$$P(z) = (1 - \lambda\tau)(z-1)\frac{B(\lambda - \lambda z)}{z + B(\lambda - \lambda z)} = (1-\rho)(z-1)\frac{B(\lambda - \lambda z)}{z - B(\lambda - \lambda z)}. \qquad (4.10)$$

Az M/M/1 rendszer estében a kiszolgálási idő μ paraméterű exponenciális eloszlású, ezért ekkor a Laplace-transzformáltja

$$B(s) = \frac{\mu}{s + \mu}$$

(lásd a (3.7) levezetést). Ezt behelyettesítve a határeloszlás generátorfüggvényébe

$$\begin{aligned} P(z) &= (1-\rho)(z-1)\frac{\frac{\mu}{(\lambda-\lambda z)+\mu}}{z-\frac{\mu}{(\lambda-\lambda z)+\mu}} = (1-\rho)\frac{\mu(z-1)}{(\mu+\lambda)z-\lambda z^2-\mu} = \\ &= (1-\rho)\frac{\mu(z-1)}{(\mu-\lambda z)(z-1)} = \frac{(1-\rho)\mu}{\mu-\lambda z} = \frac{(1-\rho)}{1-\rho z}, \end{aligned}$$

ami éppen az $1-\rho$ paraméterű geometriai eloszlás generátorfüggvénye, tehát visszakapjuk az M/M/1 rendszernél kiszámolt határeloszlást.

Most nézzük a W várakozási idő határeloszlását. Mivel a kiszolgálás az érkezés sorrendjében történik, ezért az n-edik igény távozásakor azok az igények maradnak a rendszerben, amelyek azidő alatt érkeztek, amíg az n-edik igény a rendszerben tartózkodott. Ez az idő is valószínűségi változó, mégpedig a W_n várakozási időnek és az S_n kiszolgálási időnek az összege. Jelölje a sűrűségfüggvényét $f(x)$. Felhasználva, hogy az érkezési folyamat λ intenzitású Poisson-folyamat, Y_n eloszlásához hasonlóan (lásd a (4.4) számítást) kaphatjuk, hogy

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \int_0^\infty \mathbf{P}(X_n = k \mid W_n + S_n = x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

amiből a (4.9) levezetéssel analóg módon X_n generátorfüggvénye és $W_n + S_n$ eloszlásának Laplace-transzformáltja közötti kapcsolatra

$$P^{(n)}(z) = F(\lambda - \lambda z)$$

adódik. A Laplace-transzformált (3.5) tulajdonságából tudjuk, hogy a konvolúciónak szorzás felel meg, azaz ha két valószínűségi változó összegét tekintjük, akkor az eloszlás Laplace-transzformáltja a két eloszlás Laplace-transzformáltjának a szorzata. Így

$$F(s) = W(s)B(s),$$

ha $W(s)$-sel jelöljük a várakozási idő eloszlásának Laplace-transzformáltját. Tehát

$$P^{(n)}(z) = W(\lambda - \lambda z)B(\lambda - \lambda z),$$

illetve határértéket véve

$$P(z) = W(\lambda - \lambda z)B(\lambda - \lambda z).$$

Behelyettesítve a (4.10) kifejezést és átrendezve

$$W(\lambda - \lambda z) = (1-\rho)(z-1)\frac{1}{z - B(\lambda - \lambda z)},$$

vagyis $s = \lambda - \lambda z$ helyettesítéssel a várakozási idő eloszlásának Laplace-transzformáltja

$$W(s) = (1-\rho)\left(\frac{-s}{\lambda}\right)\frac{\lambda}{\lambda - s - \lambda B(s)} = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda B(s)}.$$

Most nézzük speciálisan azt az esetet, amikor a kiszolgálási idő is exponenciális eloszlású. Az M/M/1 rendszernél nem a várakozási időt, hanem a késleltetést vizsgáltuk, amelyek azonban rokon mennyiségek, hiszen a késleltetés a várakozási időből és az igény kiszolgálási idejéből adódik össze. Így eloszlása a két valószínűségi eloszlás konvolúciója, ami a Laplace-transzformáltak esetében szorzást jelent.

$$\begin{aligned} D(s) &= W(s)B(s) = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda B(s)}B(s) = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda\frac{\mu}{s+\mu}}\frac{\mu}{s+\mu} = \\ &= \frac{(1-\rho)s(s+\mu)}{s^2+(\mu-\lambda)s}\frac{\mu}{s+\mu} = \frac{(1-\rho)\mu}{s+(\mu-\lambda)} = \frac{\mu-\lambda}{s+(\mu-\lambda)}, \end{aligned}$$

ami éppen a $\mu-\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlás generátorfüggvénye, tehát a késleltetésre is visszakapjuk az M/M/1 rendszernél kiszámolt eloszlást.

4.6. A G/M/1 rendszer

A G/M/1 rendszerbe az igények egy tetszőleges felújítási folyamat szerint érkeznek, a kiszolgálási idők pedig egymástól és az érkezési folyamattól független, μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Egy kiszolgáló egységünk van, a sorban pedig tetszőlegesen sok igény várakozhat.

Legyen T_n az $(n-1)$-edik és az n-edik igény beérkezése között eltelt idő. Mivel az érkezési folyamat felújítási folyamat, azért $\{T_n\}$ független, azonos eloszlású sorozat, és egy ezekkel megegyező eloszlású valószínűségi változó legyen T. A további tárgyalás egyszerűsége érdekében itt is fel fogjuk tenni, hogy T abszolút folytonos $a(x)$ sűrűségfüggvénnyel és várható értéke véges. A sűrűségfüggvény Laplace-transzformáltját jelölje $A(s)$. T várható értékének reciproka legyen λ, azaz

$$\mathbf{P}(T < x) = \int_0^x a(u)\,\mathrm{d}u \quad (x \geq 0),$$

illetve

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty x\,a(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jelölje $N(t)$ a rendszerben a t időpillanatban lévő igények számát. Az M/G/1 sorhoz hasonlóan az $\{N(t) : t \geq 0\}$ folyamat általában nem Markov-lánc, mivel a rendszer jövője t-ben nem csak $N(t)$-től függ, hanem attól is, hogy az utoljára érkezett igény érkezése óta mennyi idő telt el. Itt is a beágyazott Markov-lánc módszerét fogjuk használni, kiválasztott időpontjaink pedig az érkezéseket „közvetlenül” megelőző pillanatok lesznek. Itt nem lesz igaz, hogy az $N(t)$ folyamat határeloszlása megegyezik a beágyazott Markov-lánc határeloszlásával, de ez nem okoz gondot, hiszen minket éppen az érkezésekkor „látott” eloszlás érdekel, és a beágyazott Markov-lánc éppen ezt fogja megadni.

Egy G/M/1 rendszerben legyen X_n közvetlenül az n-edik igény beérkezése előtt a sorban és a kiszolgálóban lévők száma, formálisan

$$X_n = \lim_{\Delta\to 0+} N\left(\textstyle\sum_{i=1}^n T_i - \Delta\right).$$

Megmutatjuk, hogy $\{X_n\}$ homogén Markov-lánc. Jelölje V_n' az $(n-1)$-edik és az n-edik igény érkezése között (egy T_n hosszú időszakasz alatt) kiszolgált igények számát. $\{X_n\}$ eleget tesz az

$$X_{n+1} = X_n + 1 - V_{n+1}' \tag{4.11}$$

evolúciós egyenletnek.

Sajnos a (4.11) rekurzió kezelése nem egyszerű feladat, mivel V_n' függ X_{n-1}-től, és így $\{V_n'\}$ nem azonos eloszlású sorozat (például $V_1' \equiv 0$). Legyen V_n azon igények száma, melyeket a rendszer az $(n-1)$-edik és az n-edik igény érkezése között kiszolgált volna, ha a sor soha nem ürült volna ki. $\{V_n\}$ független és azonos eloszlású, hiszen $\{T_n\}$ és a kiszolgálások is ilyenek, illetve egymástól függetlenek. Ezzel (4.11) átírható

$$X_{n+1} = (X_n + 1 - V_{n+1})^+ \tag{4.12}$$

alakba, és ebből az 1.1. tétel értelmében következik, hogy $\{X_n\}$ homogén Markov-lánc.

Számoljuk ki a lánc átmenetvalószínűség-mátrixának elemeit!

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \\ &= \mathbf{P}\big((X_n + 1 - V_{n+1})^+ = j \mid X_n = i\big) = \\ &= \mathbf{P}\big((i + 1 - V_{n+1})^+ = j \mid X_n = i\big) = \\ &= \mathbf{P}\big((i + 1 - V_{n+1})^+ = j\big), \end{aligned} \tag{4.13}$$

hiszen X_n és V_{n+1} függetlenek. Világos, hogy ha $j > i+1$, akkor $p_{ij} = 0$. Most legyen $0 < j \le i+1$. Ekkor a (4.13) képletben a pozitív rész képzése elhagyható és

$$p_{ij} = \mathbf{P}(V_{n+1} = i - j + 1) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \mathbf{P}(V_{n+1} = i-j+1 \mid T_{n+1} = x)\, a(x)\, \mathrm{d}x = &(4.14)\\
&= \int_0^\infty \frac{(\mu x)^{i-j+1}}{(i-j+1)!} e^{-\mu x} a(x)\, \mathrm{d}x \quad (0 < j \le i+1), &(4.15)
\end{aligned}
$$

hiszen azzal a feltétellel, hogy mindig van kiszolgálandó igény, a kiszolgálási időpontok által alkotott pontfolyamat μ intenzitású Poisson-folyamat, és a (4.14) lépésben éppen ennek az x idő alatti növekménye szerepel. Ebben az esetben a (4.15) kifejezésből következik, hogy p_{ij} csak az indexek különbségétől függ, azaz

$$p_{ij} = \mathbf{P}(V_{n+1} = i-j+1) = \beta_{i-j+1} \quad (0 < j \le i+1).$$

A $\mathbf{\Pi}$ mátrix soraiban lévő elemek összege 1, tehát

$$p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1 - \sum_{j=1}^{i+1} \beta_{i-j+1} = 1 - \sum_{k=0}^{i} \beta_k.$$

Ezek alapján

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1-\beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & \dots \\ 1-\beta_0-\beta_1 & \beta_1 & \beta_0 & 0 & \dots \\ 1-\beta_0-\beta_1-\beta_2 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

ahol

$$\beta_k = \int_0^\infty \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} a(x)\, \mathrm{d}x. \tag{4.16}$$

Nyilvánvaló, hogy a lánc irreducíbilis és aperiodikus, és a Foster-kritérium alkalmazásával (a 2.1. tétel bizonyításában látott módon) kaphatjuk, hogy $\{X_n\}$ stabil, ha $\mathbf{E}(V_n) > 1$. Ugyanakkor

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(V_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbf{P}(V_n = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \beta_k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(k \int_0^\infty \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} a(x)\, \mathrm{d}x \right) = \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} \right) a(x)\, \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^\infty \mu\, x\, a(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\mu}{\lambda},
\end{aligned}
$$

azaz a lánc stabil, ha

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

Stabil esetben legyen

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = i) = r_i.$$

Az $R = [r_0, r_1, r_2, \ldots]$ határeloszlást az

$$R = R\mathbf{\Pi} \tag{4.17}$$

egyenletrendszer egyértelmű olyan megoldásaként kaphatjuk meg, amely eloszlás, azaz amelyre

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i = 1.$$

Az M/M/1 sornál a határeloszlás geometriai eloszlás volt, tehát sejthetjük, hogy itt is az lesz. Tegyük fel tehát, hogy $r_i = (1-\sigma)\sigma^i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ valamely $0 < \sigma < 1$-re. A (4.17) egyenletből

$$r_i = \sum_{j=0}^{\infty} r_j p_{ji} = \sum_{j=i-1}^{\infty} r_j \beta_{j-i+1} \quad (i \geq 1),$$

melybe a feltételezett geometriai eloszlás tagjait illetve a (4.16) kifejezést beírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(1-\sigma)\sigma^i &= \sum_{j=i-1}^{\infty} \left((1-\sigma)\sigma^j \int_0^{\infty} \frac{(\mu x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} e^{-\mu x} a(x)\,\mathrm{d}x \right) = \\
&= (1-\sigma)\sigma^{i-1} \int_0^{\infty} \left(\sum_{j=i-1}^{\infty} \frac{(\mu x\sigma)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} \right) e^{-\mu x} a(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= (1-\sigma)\sigma^{i-1} \int_0^{\infty} e^{\mu x\sigma} e^{-\mu x} a(x)\,\mathrm{d}x \quad (i \geq 1),
\end{aligned}$$

azaz

$$\sigma = \int_0^{\infty} e^{-\mu x(1-\sigma)} a(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.18}$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon az érkezések között eltelt idő eloszlásának Laplace-transzformáltja áll, így

$$\sigma = A(\mu - \mu\sigma).$$

A (4.18) integrálegyenletet $a(x)$ ismeretének hiányában nem tudjuk σ-ra megoldani, de nekünk elég megmutatni, hogy létezik egy $0 < \sigma < 1$ megoldás, hiszen ekkor a feltételezett geometriai eloszlás megoldja a (4.17) egyenletet és emiatt ez lesz a határeloszlás is. (4.18) bal illetve jobb oldalát jelölje $B(\sigma)$ és $J(\sigma)$, ekkor $B(0) = 0$, $B(1) = 1$, $J(0) > 0$ és $J(1) = 1$, mivel $a(x)$ sűrűségfüggvény. Mindkét oldalon σ-ban folytonos függvény áll, így ha $J(\sigma)'_{|\sigma=1} > B(\sigma)'_{|\sigma=1} = 1$, akkor létezik metszéspontjuk $(0,1)$-ben. Viszont

$$\begin{aligned} J(\sigma)'_{|\sigma=1} &= \left(\int_0^\infty e^{-\mu x(1-\sigma)} a(x)\,\mathrm{d}x\right)'_{|\sigma=1} = \\ &= \left(\int_0^\infty \mu x e^{-\mu x(1-\sigma)} a(x)\,\mathrm{d}x\right)_{|\sigma=1} = \\ &= \int_0^\infty \mu x\, a(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mu}{\lambda} = \mathbf{E}(V_n), \end{aligned}$$

és a stabilitást éppen $\mathbf{E}(V_n) > 1$ esetén tudtuk garantálni.

Tehát a G/M/1 sornál az érkező igények által látott eloszlás konvergál, ha $\rho < 1$, és ekkor a határeloszlás geometriai eloszlás.

Az n-edik igény beérkezéskor X_n igényt talál a rendszerben, így kiszolgálásáig végig kell várnia ennek az X_n igénynek a kiszolgálását. Azaz egészen pontosan, nem kell várakoznia, ha üres a rendszer, aminek a valószínűsége a sorhossz határeloszlása alapján $\mathbf{P}(X_0' = 0) = 1 - \sigma$, és σ valószínűséggel végig kell várnia az éppen kiszolgálás alatt lévő igény kiszolgálásából hátralévő időt, valamint a többi $X_n - 1$ igény teljes kiszolgálását. Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága miatt egy kiszolgálásból hátralévő idő is exponenciális eloszlású, ha a kiszolgálási idő az, így a W_n várakozási idő X_n darab független, azonos μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összege. Ezért a Laplace-transzformált tulajdonságai miatt, a várakozási idő eloszlásának transzformáltja az exponenciális eloszlás Laplace-transzformáltjának megfelelő hatványaként írható. Jelölje $W(s)$ a várakozási idő határeloszlásának Laplace-transzformáltját. Az μ paraméterű exponenciális eloszlás Laplace-transzformáltja

$$\frac{\mu}{s+\mu}$$

(lásd a (3.7) levezetést), így tehát

$$\begin{aligned} W(s) &= \sum_{j=0}^\infty W(s \mid X_n = j)\mathbf{P}(X_n = j) = \\ &= \sum_{j=0}^\infty \left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)^j (1-\sigma)\sigma^j = \\ &= (1-\sigma)\sum_{j=0}^\infty \left(\frac{\mu\sigma}{s+\mu}\right)^j = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-\sigma)\frac{s+\mu}{s+\mu-\mu\sigma} = \\
&= (1-\sigma)+\sigma\frac{(1-\sigma)\mu}{s+\mu-\mu\sigma}.
\end{aligned}
$$

Az első tag az $\{1,0,0,\ldots\}$ eloszlás Laplace-transzformáltjának $(1-\sigma)$-szorosa, a második pedig a $\mu-\mu\sigma$ paraméterű exponenciális eloszlás Laplace-transzformáltjának σ-szorosa. Tehát a várakozási idő σ valószínűséggel $\mu-\mu\sigma$ paraméterű exponenciális eloszlású, és $1-\sigma$ valószínűséggel nulla.

Speciális esetként nézzük az M/M/1 renszert. Ott a sorhossz határeloszlása $1-\rho$ paraméterű geometriai, azaz $\sigma=\rho=\frac{\lambda}{\mu}$. Ezt behelyettesítve a várakozási idő eloszlására azt kapjuk, hogy $\mu-\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlás, ha nem üres a sor. A késleltetés a várakozási idő és a kiszolgálási idő összege, tehát eloszlásának Laplace-transzformáltja a két eloszlás Laplace-transzformáltjának szorzata.

$$
\begin{aligned}
D(s) &= W(s)\frac{\mu}{s+\mu} = (1-\rho)\frac{s+\mu}{s+\mu-\mu\rho}\frac{\mu}{s+\mu} = \\
&= \frac{\mu-\lambda}{\mu}\frac{s+\mu}{s+\mu-\lambda}\frac{\mu}{s+\mu} = \frac{\mu-\lambda}{s+\mu-\lambda}.
\end{aligned}
$$

Tehát a késleltetésre is visszakapjuk az M/M/1 rendszernél kiszámolt eloszlást.

4.7. A G/G/1 rendszer

A G/G/1 rendszerbe az igények egy tetszőleges felújítási folyamat szerint érkeznek, a kiszolgálási idők pedig egymástól és az érkezési folyamattól független, tetszőleges eloszlású valószínűségi változók. Egy kiszolgáló egységünk van, a sorban pedig tetszőlegesen sok igény várakozhat.

Ebben a rendszerben tehát sem az S_n kiszolgálási időről, sem pedig az érkezések között eltelt T_n időről sem tesszük fel, hogy exponenciális eloszlású. Az előző szakaszok jelöléséhez híven, legyen továbbra is $a(x)$ a T_n és $b(x)$ az S_n eloszlásának sűrűségfüggvénye. Jelölje $N(t)$ a rendszerben a t időpillanatban lévő igények számát. Ebben a legáltalánosabb esetben már nemcsak az $N(t)$ sorhossz nem lesz Markov-lánc, de beágyazott Markov-láncot sem tudunk találni.

Markov-láncot alkot viszont a várakozási idők sorozata, hiszen továbbra is igaz, hogy az $(n+1)$-edik igény várakozási idejét az n-edik igény várakozásából még hátralévő idő $(W_n - T_{n+1})$ és az n-edik igény kiszolgálási idejének összege adja, ha még nem fejeződött be az n-edik igény kiszolgálása, tehát igaz a Lindley-egyenlőség (lásd (2.17)), a várakozási idő a

$$
W_{n+1} = (W_n - T_{n+1} + S_n)^+
$$

rekurzióval írható fel, csak itt T_n és S_n abszolút folytonos valószínűségi változók. Mind a T_n, mind az S_n sorozat független és azonos eloszlású, és egymástól is függetlenek, így az 1.1. tétel szerint $\{W_n\}$ valós értékű, homogén Markov-lánc.

Vezessük be az $U_n = S_n - T_{n+1}$ valószínűségi változókat, és tegyük fel, hogy a rendszer kezdetben üres, azaz az első igénynek nem kell várakoznia, $W_1 = 0$. A rekurziót kifejtve a következőt kapjuk a várakozási időkre:

$$\begin{aligned}
W_1 &= 0\\
W_2 &= (W_1+U_1)^+ = \max(0, W_1+U_1) = \max(0, U_1)\\
W_3 &= (W_2+U_2)^+ = \max(0, W_2+U_2) = \max(0, U_2, U_2+U_1)\\
&\vdots\\
W_{n+1} &= \max(0, U_n, U_n+U_{n-1}, \ldots, U_n+\cdots+U_2+U_1)\,.
\end{aligned}$$

Mivel U_n-ek függetlenek és azonos eloszlásúak, felcserélhetjük a sorrendjüket és a

$$W'_{n+1} = \max(0, U_1, U_1+U_2, \ldots, U_1+\cdots+U_{n-1}+U_n)$$

valószínűségi változó eloszlása megegyezik W_n eloszlásával. Ráadásul a $\{W'_n\}$ sorozat monoton növő, ezért egy valószínűséggel létezik (esetleg végtelen) határértéke $W' = \lim\limits_{n\to\infty} W'_n$. Jelölje az U_n-ek közös sűrűségfüggvényét $c(x)$, és W_n eloszlásfüggvényét

$$F_n(x) = \mathbf{P}(W_n \le x) = \mathbf{P}(W'_n \le x).$$

Ekkor

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0,\\ \int_{-\infty}^{x} F_n(x-u)c(u)\,\mathrm{d}u, & \text{ha } x \ge 0.\end{cases}$$

A várakozási idő nem lehet negatív, tehát $x < 0$-ra világos, hogy az eloszlásfüggvény értéke nulla. Ha $x \ge 0$, akkor

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x) &= \mathbf{P}(W_{n+1} \le x) =\\
&= \mathbf{P}((W_n+U_n)^+ \le x) =\\
&= \mathbf{P}(W_n+U_n \le x) =\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(W_n+U_n \le x \mid U_n = u)c(u)\,\mathrm{d}u =\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(W_n+u \le x)c(u)\,\mathrm{d}u =\\
&= \int_{-\infty}^{x} F_n(x-u)c(u)\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy W_n és U_n függetlenek. Tudjuk, hogy $F_n(x)$ konvergál W' eloszlásfüggvényéhez, jelölje ez utóbbit $F(x)$. A várakozási idő határeloszlására a következő, ún. *Lindley-féle integrálegyenletet* kapjuk:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \int_{-\infty}^{x} F(x-u)c(u)\,\mathrm{d}u, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Ezt az egyenletet általában nehéz megoldani, könnyen kaphatunk viszont feltételt arra nézve, hogy mikor lesz az F megoldás valódi eloszlásfüggvény, azaz mikor lesz a várakozási idők alkotta Markov-lánc stabil. Evolúciós egyenlettel adott Markov-láncoknál (2.18) alapján tudjuk, hogy diszkrét esetben, amikor a várakozási idő is diszkrét valószínűségi változó, akkor a stabilitás elégséges feltétele

$$\mathbf{E}(S_1) < \mathbf{E}(T_1) < \infty.$$

Megmutatjuk, hogy ez a feltétel most is elégséges a stabilitáshoz. A W' változó $F(x)$ eloszlásfüggvényére ha $x \geq 0$, akkor

$$F(x) = \mathbf{P}(W' \leq x) = \mathbf{P}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} U_i \leq x \text{ minden } n\text{-re}).$$

Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(S_1) < \mathbf{E}(T_1)$ teljesül. Ezt a feltételt úgy is írhatjuk, hogy $\mathbf{E}(U_1) = \mathbf{E}(S_1) - \mathbf{E}(T_1) < 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} U_i > 0 \text{ végtelen sok } n\text{-re}) = \\ &\quad = \mathbf{P}\big(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} U_i - \mathbf{E}(U_1) > -\mathbf{E}(U_1) \text{ végtelen sok } n\text{-re}\big) = \\ &\quad = \mathbf{P}\big(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} U_i - \mathbf{E}(U_1) > |\mathbf{E}(U_1)| \text{ végtelen sok } n\text{-re}\big) = 0, \end{aligned}$$

hiszen a nagy számok erős törvénye szerint

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i \to \mathbf{E}(U_1)$$

1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$. Tehát valamely n után $\sum_{i=1}^{n} U_i < 0$, és így

$$W' = \max\left(0, U_1, U_1 + U_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} U_i, \ldots\right)$$

1 valószínűséggel csak véges sok tag maximuma, tehát

$$\mathbf{P}(W' < \infty) = 1,$$

amiből következik, hogy F valódi eloszlásfüggvény. Összefoglalva tehát, ha $\mathbf{E}(S_1) < \mathbf{E}(T_1)$, vagyis a kihasználtsági tényezőre

$$\rho = \frac{\mathbf{E}(S_1)}{\mathbf{E}(T_1)} < 1,$$

akkor a G/G/1 rendszerben várakozási időnek létezik határeloszlása, a $\{W_n\}$ Markov-lánc stabil.

4.8. Feladatok

4.1. feladat. *Igazoljuk, hogy az M/M/1 sorra teljesül a Little-formula (1.15. tétel)!*

4.2. feladat. *Igazoljuk a (4.3) egyenletet!*

4.3. feladat. *Egy üzletbe egymás után érkező vásárlók érkezése közötti idő 10 perc várható értékű exponenciális eloszlású, és az üzletben 4 vásárló fér el, a többi az utcán áll sorban. Mekkora az exponenciális eloszlású kiszolgálási idő várható értéke, ha annak a valószínűsége, hogy egy vásárló az utcán kezdi a sorbanállást, kisebb, mint* 0.01*?*

4.4. feladat. *Az előző feladatban mekkora a kérdéses várható érték, ha a 4 percnél nagyobb késleltetés valószínűsége kisebb, mint* 0.5*?*

4.5. feladat. *A 4.3. feladatban legyen az exponenciális eloszlású kiszolgálási idő várható értéke 5 perc. Mekkora az átlagos késleltetés?*

4.6. feladat. *Az előző feladatban mekkora az átlagos késleltetés, ha a kiszolgálási idő a* $[4\ perc, 6\ perc]$ *intervallumban egyenletes eloszlású?*

4.7. feladat. *Ellenőrizzük, hogy a (4.6) képletből* $b(x) = \mu e^{-\mu x}$ $(x \geq 0)$ *esetén visszakapjuk a (4.1) képletet!*

4.8. feladat. *Ellenőrizzük, hogy a (4.7) képletből az M/M/1 sorra visszakapjuk az ott nyert képletet!*

4.9. feladat. *Igazoljuk a Little-formulát az M/G/1 sorra!*

4.10. feladat. *Igazoljuk a (4.11) egyenletet!*

4.11. feladat. *Igazoljuk a (4.12) egyenletet!*

4.12. feladat. *Oldjuk meg a (4.18) egyenletet* $a(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$ *esetén, és ellenőrizzük, hogy visszakapjuk az M/M/1 sor határeloszlását!*

4.13. feladat. *Egy M/M/1 típusú rendszerben a szomszédos érkezések távolságának várható értéke* 5 *perc, a kiszolgálási idő várható értéke pedig* 4 *perc. Mi annak a valószínűsége, hogy a felhasználó késleltetése* 10 *percnél nagyobb?*

4.14. feladat. *Tegyük fel, hogy a vevők egy* λ *intenzitású Poisson-folyamat szerint érkeznek az üzletbe. Végtelen sok kiszolgáló van és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású* μ *paraméterrel. Mutassuk meg, hogy a* t*-edik időpillanatban az üzletben lévő vevők száma* $Z(t)$ *egy születési-halálozási folyamatot alkot. Bizonyítsuk be, hogy* $Z(t)$ *stabil, és add meg* $Z(t)$ *határeloszlását!*

Jelölések

$\mathbb{R}$	valós számok halmaza
δ_{ij}	a Kronecker-féle szimbólum, azaz 1, ha $i = j$, egyébként 0
a^+	az a valós szám pozitív része, azaz a, ha $a \geq 0$, egyébként 0
A^c	az A esemény ellentettje (komplementere)
I_A	az A esemény indikátora, azaz 1, ha A bekövetkezik, egyébként 0
$\mathbf{P}(A)$	az A esemény valószínűsége
$\mathbf{E}(X)$	az X valószínűségi változó várható értéke
$m(t)$	sztochasztikus folyamat várható érték-függvénye
$\sigma^2(X)$	az X valószínűségi változó szórásnégyzete
$\mathrm{cov}(X,Y)$	az X és Y valószínűségi változók kovarianciája
$\mathrm{R}(s,t)$	másodrendű folyamat kovariancia-függvénye
R_k	gyengén stacionárius folyamat kovariancia-függvénye
S	Markov-lánc állapottere
$\mathbf{\Pi}$	diszkrét idejű Markov-lánc egylépéses átmenetvalószínűség-mátrixa
$\mathbf{\Pi}(t)$	folytonos idejű Markov-lánc átmenetvalószínűség-mátrixa
$\mathbf{Q}$	folytonos idejű Markov-lánc rátamátrixa
$\mathbf{E}$	egységmátrix
$\blacksquare$	bizonyítás vége

Irodalomjegyzék

[1] I. J. Capetanakis: Tree algorithms for packet broadcast channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-25:505–515, 1979.

[2] Kai Lai Chung: *Markov Chains With Stationary Transition Probabilities*. Springer–Verlag, Berlin, 2nd edition, 1967.

[3] Jacob Willem Cohen: *The Single Server Queue*. North Holland, Amsterdam, revised edition, 1982.

[4] Robert B. Cooper: *Introduction to Queueing Theory*. Elsevier North Holland, New York, 2nd edition, 1981.

[5] Sándor Csibi: On the stability of random access data communication during the time left by speech packets. *Problems of Control and Information Theory*, 14(4):231–246, 1985.

[6] Sándor Csibi: More on the stability of a data packet flow embedded randomly into a partially active, scheduled speech packet flow. *Problems of Control and Information Theory*, 16(4):259–269, 1987.

[7] William Feller: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume I. Wiley, New York, 3rd edition, 1968.

[8] William Feller: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume II. Wiley, New York, 2nd edition, 1971.

[9] William Feller: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[10] Robert G. Gallager: Conflict resolution in random access broadcast networks. *Proceedings AFORS Workshop on Communication Theory and Applications*, pages 74–76, Provincetown, MA, 1978.

[11] Samuel Karlin–Howard M. Taylor: *Sztochasztikus folyamatok*. Gondolat, Budapest, 1985.

[12] Leonard Kleinrock: *Queueing Systems*, volume I: Theory. Wiley, New York, 1975.

[13] Leonard Kleinrock: *Sorbanállás – kiszolgálás: Bevezetés a tömegkiszolgálási rendszerek elméletébe*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[14] James L. Massey: *Collision-Resolution Algorithms and Random-Access Communication*, volume Multi-User Communications of *CISM Courses and Lectures*, pages 73–137. Springer–Verlag, Berlin, 1981.

[15] Prékopa András: *Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.

[16] Thomas G. Robertazzi: *Computer Networks and Systems*. Springer–Verlag, New York, 2nd edition, 1994.